Kommunikationstechnik II – Wintersemester 08/09

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung: 10. Aufgabenblatt

Lösung in der Rechenübung am 12.2.2009

1. Aufgabe: Kenngrößen von Kanalkodes

Ein Kanalkodewort a_i, das über einen gestörten Kanal zum Dekodierer übermittelt wird, überlagert sich mit Fehlermustern e_i. Für die empfangenen Kodeworte b_i gilt also: $b_i = a_i + e_i$.
Eine fehlerhafte Bitfolge wird dann erkannt, wenn b_i nicht Element des Kodewortalphabets A ist. Damit also $b_i \notin A$ für alle $e_i \neq 0$, müssen sich die Kanalkodeworte a_i möglichst voneinander unterscheiden. Ein Maß dafür ist die Hamming-Distanz, wobei die minimale Hamming-Distanz eines Kanalkodes möglichst groß $d_{\min}$ sein sollte.
Bei einem Kanalkode sind alle Fehlermuster e_i mit einem Gewicht $w(e_i) < d_{\min}$ *erkenn*bar. Allerdings wird eine fehlerhafte Bitfolge immer in das nächstliegende Kanalkodewort korrigiert, sodass nur jene Fehlermuster e_i mit einem Gewicht $w(e_i) < d_{\min}/2$ auch korrekt *korrigier*bar.

Für die korrigierbaren Fehlerstellen f_k gilt also: $$f_k = \frac{d_{\min} - 1}{2}$$

a) Durch einen Kanalkode mit Kodewörtern der Länge $n = 15$ sollen alle Fehlermuster e_i mit einem Gewicht $w(e_i) \leq 3$ korrigierbar sein. Wieviele redundante Elemente muss der Kanalkode enthalten?

Um in einem Kanalkode alle Fehlermuster mit $w(e_i) \leq f_k$ korrigieren zu können, kann eine Mindestanzahl von redundanten Stellen berechnet werden, die Hamming-Schranke:

$$2^k \geq \sum_{i=0}^{f_k} \binom{n}{i}$$ mit $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$: verschiedene Kombinationsmöglichkeiten von jeweils i fehlerhaften Bits.

Mit den vorgegebenen Größen gilt also:

$$2^k \geq \sum_{i=0}^{3} \binom{15}{i} = 1 + 15 + \frac{15!}{2! \cdot 13!} + \frac{15!}{3! \cdot 12!} = 1 + 15 + \frac{15 \cdot 14}{2} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 1 + 15 + 105 + 455 = 576$$

$$\leftrightarrow \quad 2^k \geq 576$$

$$\leftrightarrow \quad k \geq ld(576) = 9{,}17 \approx \underline{\underline{10}}$$

b) Wie groß sind relative Redundanz und Koderate eines Kanalkodes mit $n = 63$ und $d_{\min} = 3$?

Bei k redundanten Stellen gilt für die relative Redundanz: $r_\mathrm{k} = \frac{k}{n}$

Zudem ist $f_\mathrm{k} = \frac{d_{\min} - 1}{2}$

Zunächst wird also die nötige Anzahl redundanter Stellen berechnet:
$2^k \geq \sum_{i=0}^{1} \binom{63}{i} = 1 + 63 = 64 \quad \leftrightarrow \quad k \geq ld(64) = 6$

Damit ist $r_\mathrm{k} = \frac{k}{n} = \frac{6}{63} = \underline{\underline{0{,}095}}$

Bei k redundanten Stellen ist die Qullenkodewortlänge $l = n - k = 63 - 6 = 57$

Für die Koderate gilt also: $R = \frac{l}{n} = \frac{57}{63} = \underline{\underline{0{,}905}}$

2. Aufgabe: Iterierte Kodes

a) Berechnen sie die Paritätselemente eines Paritätskodes für die 5-stelligen Quellenkodewörter aus dem Alphabet A^*:

a_1^* = (10110) a_2^* = (00110) a_3^* = (01011)

Wie groß ist die relative Redundanz dieses Kanalkodes?

Für das Paritätselement $u_{i,l+1}$ gilt: $u_{i,l+1} = \sum_{j=1}^{l} u_{ij} \bmod 2$, d.h. das Quellenkodewort wird zu einem geradzahligen Gewicht ergänzt.

Die Kanalkodewörter lauten demnach:

a_1 = (101101) a_2 = (001100) a_3 = (010111)

Da nur eine redundante Stelle hinzugefügt wird, ist $r_\mathrm{k} = \frac{k}{n} = \frac{1}{6} = \underline{\underline{0{,}167}}$

b) Auf einem Magnetband wird die gespeicherte Information durch einen zweidimensionalen iterierten Kanalkode gegen Störungen geschützt. Dazu sind jeweils m = 4 Quellenkodewörter aus A^* zu einem Block zusammengefasst. Diese (5-stelligen) Quellenkodewörter seien:

a_1^* = (10101) a_2^* = (01100) a_3^* = (01111) a_4^* = (10000)

Berechnen Sie die Paritätselemente. Wie groß ist die relative Redundanz des Kanalkodes? Zeigen Sie, dass die Empfangsfolge b_3 = (011010) fehlerbehaftet ist und korrigieren Sie sie.

$$\begin{array}{r|cccc|c|}
 & \multicolumn{4}{c}{m} & \\
\text{l-stellige} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\text{Quellenkodewörter} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\text{Paritätsbits für Spalten} \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & \uparrow \\
 & & & & & \text{Paritätsbits für Zeilen}
\end{array}$$

$$r_{\mathrm{k}} = \frac{k}{n} = \frac{m+l+1}{(m+1)\cdot(l+1)} = \frac{10}{30} = \underline{\underline{0,333}}$$

$$\begin{array}{rccccc|c}
 & & & b_3\downarrow & & & s_0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
s_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Die Prüfbits kreuzen sich im fehlerhaften Element (fett gedruckt), also lautet die korrekte Folge $b_3 = (011110) = a_3$