Kommunikationstechnik II – Wintersemester 07/08

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung: 5. Aufgabenblatt

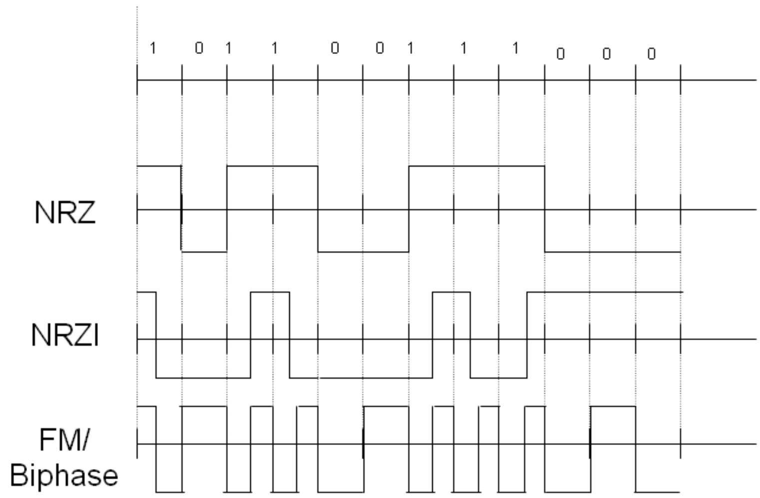
1. Aufgabe: Kanalkodierung

Zweck der Kanalcodierung:
- Abbildung der information bits des Quellkodes auf die channel bits des Kanalkodes. Bei einfachen Kodes wird jedes information bit auf ein channel bit abgebildet, bei Gruppenkodes werden mit Hilfe von Kodetabellen *m* information bits auf *n* channel bits abgebildet.
- anpassen der digitalen Zeichenfolge an realen Übertragungskanal
- Eigenschaften wie Selbsttaktung, Bandbreite, Jitterempfindlichkeit, Gleichspannungsanteil, Fehlererkennung ... durch Pulsformung und spezielle Kanalkodes beeinflussbar

Gegeben sei eine Bitfolge (information bits) von 101100111000

a) Skizzieren Sie den Spannungsverlauf dieses Signals
i) in NRZ-Kodierung, ii) in NRZI-Kodierung, iii) im Biphase Mark-Kode

i) NRZ (non return to zero): bildet 1 auf hohes, 0 auf niedriges Potential ab
ii) NRZI (NRZ-inverted): Potentialwechsel für 1 (in jede Richtung), kein Potentialwechsel für 0
iii) Biphase Mark/FM (Frequency Modulation): Potentialwechsel am Anfang und in der Mitte einer Bitperiode für 1, Potentialwechsel am Anfang einer Bitperiode für 0



b) Konstruieren Sie eine eigene Kodetabelle für einen 3/5-Gruppenkode mit einer (0,2) RLL Lauflängenkodierung (=min/max Anzahl der 0en zwischen zwei 1en).

Der zu erstellende Kode muss Datenworte von $m = 3$ bit Länge auf speziell ausgewählte Kanalkodeworte der Länge $n = 5$ abbilden.

Die 2^3 = 8 möglichen Datenworte umfassen das binäre Intervall von [000;111]. Die (0,2)-RLL Codierung verlangt eine minimale Anzahl von d = 0 und eine maximale Anzahl von k = 2 Nullen zwischen zwei aufeinander folgenden „1“-Symbolen (ist auch bei aufeinander folgenden Kodeworten einzuhalten).

Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen lassen sich den Datenworten entsprechende Kanalkodeworte zuweisen. Die Tabelle zeigt für alle Datenworte die ihnen zuzuweisenden Kanalkodeworte. Dabei handelt es sich um eine rein willkürliche (!) Auswahl und Zuweisung. Eine Optimierung unter dem Gesichtspunkt höherer Fehlersicherheit erhielte man z.B. für Kanalkodeworte, deren minimaler Kodewortabstand d_{min} (Hammingabstand = Anzahl der unterschiedlichen Bitstellen je Kodewort, siehe Skript) zueinander maximiert wurde.

Datenwort	Kanalkodewort
000	01110
001	01101
010	01011
011	10011
100	10101
101	10110
110	11001
111	01111

c) Vergleichen Sie die anhand der figure of merit (FoM) die Leistungsfähigkeit des in b) konstruierten, NRZI-kodierten Gruppenkodes mit einer einfachen Biphase Mark-Kodierung.

$FoM_{RLL}=T_W \cdot DR=(m/n)^2 \cdot (1+d) = (3/5)^2 \cdot (1+0) = 0{,}36$
$FoM_{Biphase}= T_W \cdot DR = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ (aus Tabelle, S. 47 Skript)

2. Aufgabe: Fehlererkennung

Audio Symbole mit einer Länge von 8 bit werden mit einem Paritätsbit zur Fehlererkennung kodiert.

a) Wird bei einer Paritätsprüfung das empfangene Kodewort 100100101 als fehlerfrei klassifiziert?

Je nach Parity-Typ würde dieses Wort als gültig oder ungültig erkannt werden. Bei der häufiger anzutreffenden „even parity“ wird das angefügte Prüfbit so gewählt, dass die Anzahl der Einsen im Gesamtwort (9-bit) gerade ist. Für diesen Fall wäre unser Kodewort gültig, auch wenn wir damit die (geringere) Restfehlerwahrscheinlichkeit, dass genau 2, 4, 6 oder gar 8 Bit fehlerhaft sind, außer Acht lassen. Bei „odd parity“ würde das Kodewort als fehlerhaft erkannt werden.

JA für „even parity“
NEIN für „odd parity“

Ein Nachteil einfacher Paritätskodes ist, dass nur eine ungeradzahlige Anzahl von fehlerhaften Bits erkannt wird. Zudem können diese nicht korrigiert werden, da durch den Paritätscheck nur erkannt wird, dass ein Fehler existiert, nicht aber wo er sich befindet.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer falschen Klassifizierung, wenn in dem so kodierten Kanal Bitfehler (random bit errors) mit einer Bit Error Rate (BER) von 10^{-3} auftreten?

Die Wahrscheinlichkeit einer falschen Klassifizierung, d.h. der fälschlichen Akzeptanz eines fehlerhaften Kodewortes durch die Paritybrüfung kann man mithilfe der Bernoulllischen Formel zur Binominalverteilung berechnen.

$$p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{mit} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei einem *n* mal wiederholten Zufallsexperiment (*n* voneinander unabhängigen Einzelversuche) das Ereignis *A* mit der Wahrscheinlichkeit *p* genau *k* mal auftritt.
Im Kontext der Bitfehlerbetrachtung ist dabei

Ereignis: fehlerhaftes Bit
$n =$ 9 Bit bzw. 9 Versuche je Kodewort
$k =$ Anzahl fehlerhafter Bits (Ereignisse) pro Kodewort (Versuchsreihe n)
$p=$ Auftretenswahrscheinlichkeit eines Bitfehlers

Der Term p^k beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Bits fehlerhaft sind (multiplikative Verknüpfung der Wahrscheinlichkeiten konjunkter Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A$ „und" $B) = P(A) \cdot P(B)$). Der Term $(1 - p)^{n-k}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die restlichen n-k Bits fehlerfrei sind. Die Konjunktivität (Gleichzeitigkeit) der zwei beschriebenen Zustände verlangt die multiplikative Zusammenfassung der zwei Terme. Der Term $\binom{n}{k}$ beschreibt die Gesamtanzahl aller verschiedenen Anordnungen von k fehlerhaften Bits in einem n-stelligen Kodewort (Fehlermuster) und muss mit den beiden anderen Termen multipliziert werden.

Um nun die Wahrscheinlichkeit für Falschklassifikation bei Paritykanalcodierung zu bestimmen, muss man sich zuerst klarmachen, welche Fehler zur Falschakzeptanz eines Kodeworts führen:
Die Parityprüfung erkennt dann Fehler nicht, wenn sie geradzahlig d.h. 2-, 4-, 6-, 8-fach usw. auftreten. Die Kodewortfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich nach dem Additionstheorem für disjunkte Ereignisse ($P(A \cup B) = P(A$ „oder" $B) = P(A)+P(B)$) als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P_{Kodewortfehler} = P_{2Fehler} + P_{4Fehler} + P_{6Fehler} + P_{8Fehler}$$

Man berechnet also die Auftretenswahrscheinlichkeiten P aller Bitfehlermuster, die von der Parityprüfung nicht erkannt werden und summiert diese zur Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit P_{Kodewort} auf.

$$P_{Kodewort} = \sum_k p_k \rightarrow [k = 2,4,6,8]$$

$$P_{\text{Kodewort}} = \binom{9}{2} 10^{-3\cdot 2}(1-10^{-3})^7 + \binom{9}{4} 10^{-3\cdot 4}(1-10^{-3})^5 + \binom{9}{6} 10^{-3\cdot 6}(1-10^{-3})^3 + \binom{9}{8} 10^{-3\cdot 8}(1-10^{-3})^1$$

$$P_{\text{Kodewort}} = 3{,}57 \cdot 10^{-5} + 1{,}25 \cdot 10^{-10} + 8{,}37 \cdot 10^{-17} + 8{,}99 \cdot 10^{-24}$$

$$P_{\text{Kodewort}} = 3{,}57 \cdot 10^{-5}$$

3. Aufgabe: Entropiekodierung

Die Amplitudenstufen eines mit 3 bit quantisierten Audiosignals haben folgende Häufigkeitsverteilung:
p_{-4} = 0,01, p_{-3} = 0,01, p_{-2} = 0,04, p_{-1} = 0,2, p_0 = 0,55, p_1 = 0,15, p_2 = 0,03, p_3 = 0,01

a) Wie groß ist die Entropie der Quelle?

mit: $H_i = -ld(p_i)$ und $H_{\text{m}} = \sum_i^N p_i \cdot H_i$ → $H_{\text{m}} = 1{,}8861$

```
p_i = [0.01 0.01 0.04 0.2 0.55 0.15 0.03 0.01]; % Einzelwahrscheinlichkeiten
H_i=-log2(p_i);      % Informationsgehalte H_i
H_m=sum(p_i.*H_i)    % Entropie = mittlerer Informationsgehalt
```

Der Informationsgehalt H_i. ist ein Maß für die Unbestimmtheit eines Ereignisses. Je kleiner die Wahrscheinlichkeit eines Symbols (Audio: Amplitude), desto größer ist H_i. Die Entropie H_{m} ist der mittlere Informationsgehalt einer Quelle (Audio: Signal). Sie ist maximal, wenn die Auftretenswahrscheinlichkeiten aller Amplituden gleich sind (z.B. weißes Rauschen) und minimal (= 0), wenn es nur eine Amplitude (Gleichspannung) mit der Wahrscheinlichkeit 1 gibt.

b) Für die Übertragung soll ein Huffman-Kode entworfen werden.

$$0{,}55 \quad 0{,}2 \quad 0{,}15 \quad 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}01 \quad \underbrace{0{,}01 \quad 0{,}01}_{0{,}02}$$

$$0{,}55 \quad 0{,}2 \quad 0{,}15 \quad 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad \underbrace{0{,}02 \quad 0{,}01}_{0{,}03}$$

$$0{,}55 \quad 0{,}2 \quad 0{,}15 \quad 0{,}04 \quad \underbrace{0{,}03 \quad 0{,}03}_{0{,}06}$$

$$0{,}55 \quad 0{,}2 \quad 0{,}15 \quad \underbrace{0{,}06 \quad 0{,}04}_{0{,}1}$$

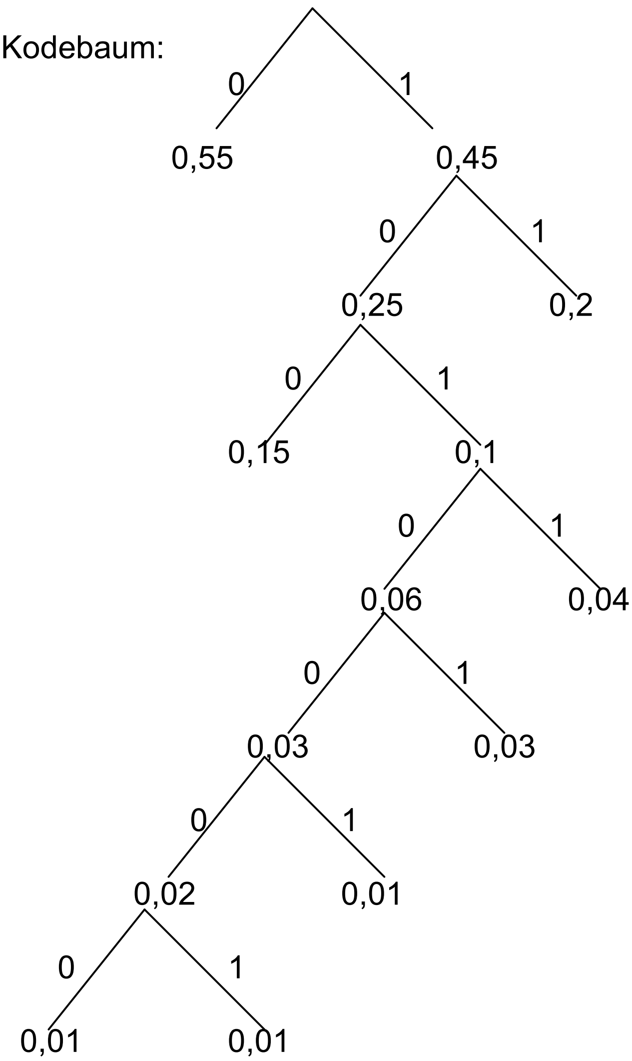
$$0{,}55 \quad 0{,}2 \quad \underbrace{0{,}15 \quad 0{,}1}_{0{,}25}$$

$$0{,}55 \quad \underbrace{0{,}25 \quad 0{,}2}_{0{,}45}$$

$$\underbrace{0{,}55 \quad 0{,}45}_{1}$$

1

Kodebaum:



Amplitudenstufe	Kode
-4	1010001
-3	101001
-2	1011
-1	11
0	0
1	100
2	10101
3	1010000

Die Tabelle zeigt eine Möglichkeit eines Huffman-Kodes.

Eigenschaften von Huffman-Kodes:

- Präfixeigenschaft: Es beginnt kein Kodewort mit der Bitfolge eines anderen, kürzeren Kodewortes.
- minimale Redundanz, nur dann optimal (= 0), wenn $p_i = 1/2^n$
- Je größer die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Kodeworts, desto kürzer ist seine Länge l_i.

c) Welche mittlere Kodewortlänge ergibt sich aus dem erstellten Kode? Vergleichen Sie die Koderedundanz des Huffman-Kodes mit der eines gleichmäßigen 3-bit-Kodes.

Mittlere Kodewortlänge des Huffman-Kodes:

$$l_{\mathrm{m\_Huffman}} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot l_i = 0{,}55 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}04 \cdot 4 + 0{,}03 \cdot 5 + 0{,}01 \cdot 6 + 0{,}01 \cdot 7 + 0{,}01 \cdot 7 = 1{,}91$$

Dies entspricht einem Kompressionsfaktor von $\frac{l_{\mathrm{m\_3bit}}}{l_{\mathrm{m\_Huffman}}} = \frac{3}{1{,}91} = 1{,}57$

Redundanz:
Huffman: $R_{\mathrm{K\_Huffman}} = l_{\mathrm{m\_Huffman}} - H_{\mathrm{m}} = 1{,}91 - 1{,}8861 = 0{,}0239$
gleichmäßige Kodierung: $R_{\mathrm{K\_3bit}} = l_{\mathrm{m\_3bit}} - H_{\mathrm{m}} = 3 - 1{,}8861 = 1{,}1139$
Durch die Huffman-Kodierung konnte die Koderedundanz minimiert werden, da aber die Amplitudenwahrscheinlichkeiten keine Potenzen von 2 sind, ist sie nicht 0.