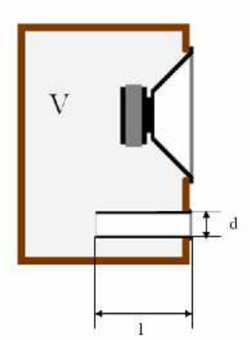
Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 9. Aufgabenblatt

1. Lautsprecher

Gegeben sei ein elektrodynamischer Lautsprecher mit folgender Gehäusekonstruktion:



Membrandurchmesser: x = 20 cm
V = 30 l
d = 5 cm
l = 10 cm

1.1 Unter der Annahme, dass sich die Membran wie ein starrer Kolben bewegt – skizzieren Sie die Richtcharakteristik des Lautsprechers in einem Polardiagramm für eine Frequenz von
f_1 = 344 Hz und f_2 = 3440 Hz

Die Abstrahlung des Lautsprechers folgt der sog. Spaltfunktion $si(x) = \frac{\sin x}{x}$. Die genaue Formel für den Schalldruck im Fernfeld ergibt sich zu (Herleitung bei M. Möser „Technische Akustik", 6. Auflage, S.85-87):

$$p_{fern} = p_Q \frac{\sin\left(\pi \frac{l}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\pi \frac{l}{\lambda} \sin \vartheta}$$

Darin ist p_Q die Schalldruck-Abstrahlung in 0°-Richtung, l die Länge des Strahlers (in diesem Falle also gleich dem Membrandurchmesser x), λ die Wellenlänge der abgestrahlten Frequenz, die betrachtet wird und ϑ der Winkel gegen die 0°-Richtung.

Für tiefe Frequenzen (mit $l << \lambda$) ergibt sich eine annähernd kugelförmige Abstrahlung. Im konkreten Fall ergibt sich für die Frequenz 344 Hz und einer Schallgeschwindigkeit von 344 m/s eine Wellenlänge von

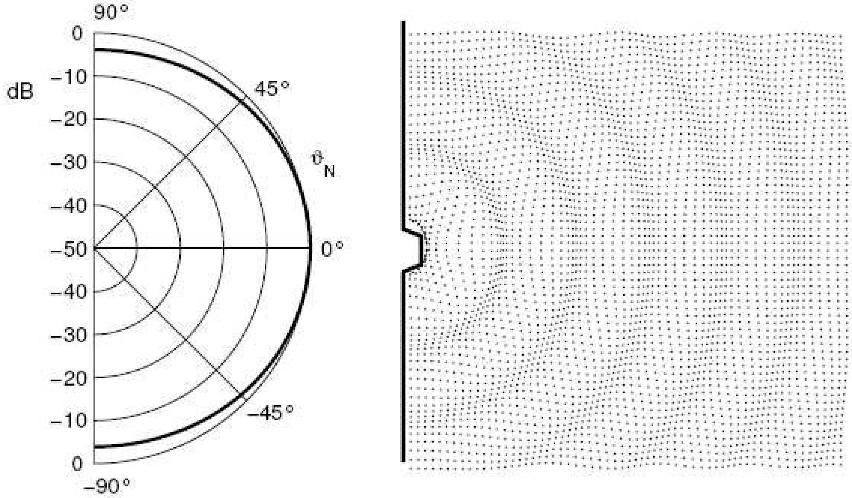
$$\lambda_1 = \frac{c}{f_1} = \frac{344 \, m/s}{344 Hz} = 1m$$

Die Formel für den Schalldruck ergibt sich also in Abhängigkeit von ϑ zu:

$$p_{fern,1} = p_Q \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5} \sin \vartheta\right)}{\frac{\pi}{5} \sin \vartheta}$$

Bei einer Abstrahlrichtung von 90° ergibt sich eine Abschwächung des Schalldrucks der 0°-Richtung um den Faktor $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\frac{\pi}{5}} = 0.935$.

Das entspricht also einer Pegelabnahme von $20\log_{10}(0.935) = -0.579dB$. Dies wird im folgenden Bild (qualitativ) veranschaulicht:



Für höhere Frequenzen wird die Abstrahlcharakteristik zunehmend keulenförmig. Im Falle eines Tons der Frequenz 3440 Hz ($\lambda_2 = 10cm$) ergibt sich der Schalldruck im Fernfeld zu:

$$p_{fern,2} = p_Q \frac{\sin(2\pi \cdot \sin\vartheta)}{2\pi \cdot \sin\vartheta}.$$

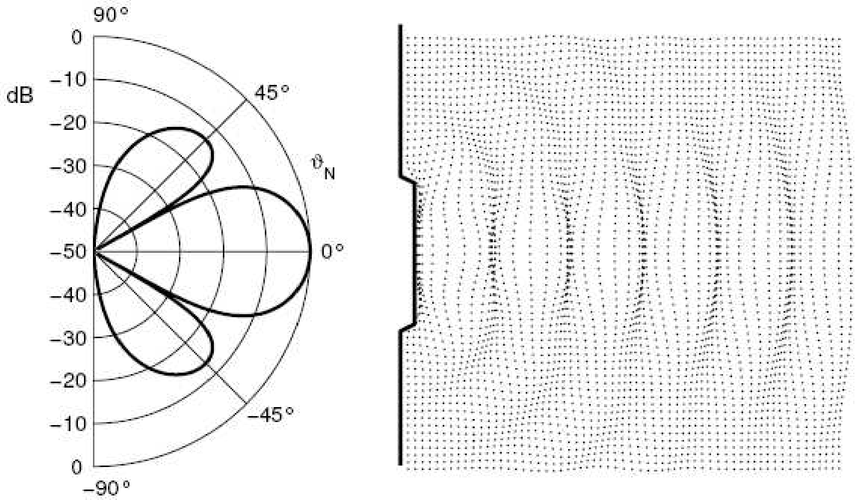
Die Minima ergeben sich an den Stellen, an denen der Zähler null wird und der Nenner ungleich ist (also nicht an der Stelle sin(0°)!). Dies ist der Fall, wenn das Argument des Sinus in Zähler ein ganzzahliges Vielfaches von π annimmt:

$$\sin(2\pi \cdot \sin\vartheta) = 0$$

$$2\pi \cdot \sin\vartheta = k \cdot \pi$$

$$\vartheta = \arcsin\frac{k}{2}$$

Minima ergeben sich also an den Stellen: 30° (k=1) und 90° (k=2).
Grafisch stellt sich das wie folgt dar:



1.2 Beschreiben Sie die frequenzabhängige Wirkung der Öffnung der ansonsten geschlossenen Box mit der kreisförmigen Öffnung vom Durchmesser d und der Halslänge l. Bei welcher Frequenz wird durch die Öffnung die meiste Schallleistung nach außen abgegeben?

Die Gleichung für die Resonanzfrequenz eines Helmholtz-Resonators lautet:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V(l + \underbrace{l_i + l_a}_{Mündungskorrektur})}}$$

Das Boxenvolumen und die Öffnung der Lautsprecherbox wirken gemeinsam als Helmholtzresonator. Die Resonanzfrequenz des Helmholtzresonators liegt dabei sehr tief, sodass sie die Abstrahlung tiefer Frequenzen unterstützt. Auf diese Weise ist es möglich, den Frequenzgang von Lautsprechern mit kleinen Membranen und schlechterer Abstrahlung im Tieftonbereich stärker an den konstanten Frequenzgang anzunähern. Die Abstimmung des Resonators erfolgt durch die Wahl der Länge der Röhre. Solche Lautsprecher werden als „Bassreflexboxen“ bezeichnet, die eingebaute Röhre als „Bassreflexröhre“.

<u>Berechnung der Resonanzfrequenz:</u>
Querschnittsfläche der Röhre:

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{0.05m}{2}\right)^2 = 1{,}96 \cdot 10^{-3} m^2$$

Volumen:

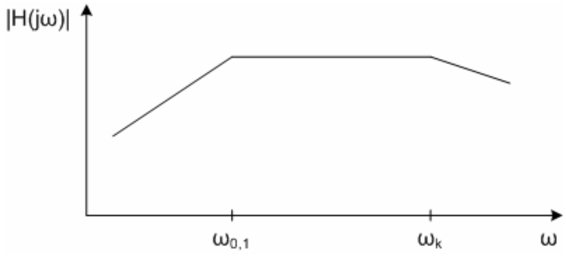
$$V = 30l = 30dm^3 = 30\left(10^{-1}m\right)^3 = 30 \cdot 10^{-3} m^3$$

Resonanzfrequenz:

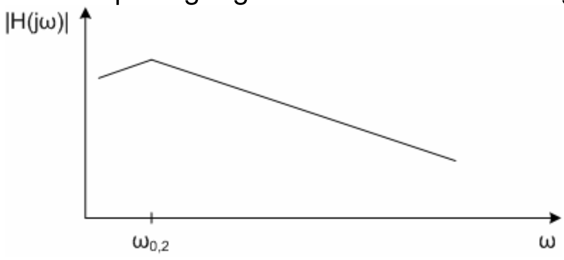
$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{V(l + l_i + l_a)}} = \frac{344 \, m/s}{2\pi}\sqrt{\frac{1{,}96 \cdot 10^{-3} m^2}{30 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot 0{,}1m}} = 44{,}25 Hz$$

1.3 Skizzieren Sie den frequenzabhängigen Übertragungsfaktor des Lautsprechers, bestehend aus dem elektrodynamischen Treiber und der in 1.2 diskutierten Öffnung der Box.

Der Frequenzgang des elektrodynamischen Lautsprechers ergibt sich zu (siehe 5.Übung):



Der Frequenzgang Helmholtzresonators ergibt sich wie folgt:



Da diese beiden Systeme nicht hintereinandergeschaltet sind, erhält man das Gesamtsystem durch inkohärente Addition der Amplitudengänge. Die Resonanzfrequenz des Helmholtzresonators wird so eingestellt, dass der Resonator dafür sorgt, dass der konstante Teil des Lautsprecherfrequenzgangs nach unten erweitert wird.

Anmerkung:
Betrachtet man zwei hintereinandergeschaltete Systeme $H_1(j\omega)$ und $H_2(j\omega)$, dann ergibt sich der Gesamtfrequenzgang durch Multiplikation der Systeme (siehe EDS-Vorlesung): $H_{gesamt}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$.

Betrachtet man die Amplitudengänge in ihrer Pegeldarstellung, also $20 \cdot \log_{10}(H_1(j\omega))$ und $20 \cdot \log_{10}(H_2(j\omega))$, dann wird durch die Anwendung des Logarithmus aus der Multiplikation eine Addition:
$20 \cdot \log_{10}(H_{gesamt}(j\omega)) = 20 \cdot \log_{10}(H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)) = 20 \cdot \log_{10}(H_1(j\omega)) + 20 \cdot \log_{10}(H_2(j\omega))$

Damit ist es also zulässig, den Gesamtfrequenzgang in Pegeldarstellung (wie z.B. in Aufgabenblatt 8 geschehen) grafisch zu ermitteln, indem man die Einzelfrequenzgänge (ebenfalls in Pegeldarstellung) addiert.
Im vorliegenden Fall haben wir es nicht mit hintereinandergeschalteten, sondern mit parallelgeschalteten Systemen zu tun. Da die Signale nicht kohärent sind, erhält man den Gesamtfrequenzgang durch inkohärente Addition (siehe Aufgabenblatt 1).

2. Stereofone Aufnahmeverfahren (XY)

2.1 Erläutern Sie die Begriffe „Hauptachsenwinkel“, „Aufnahmewinkel“ und „Akzeptanzwinkel“ eines XY-Stereofonie-Mikrofonsystems.

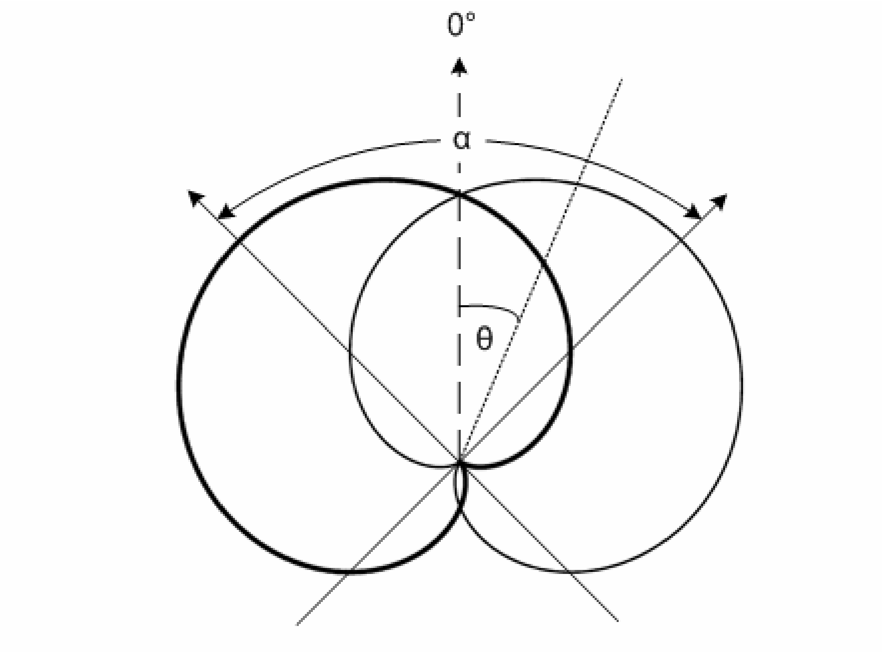
Unter dem „Hauptachsenwinkel“ versteht man den Öffnungswinkel der Mikrofone, also den Winkel, der zwischen den Hauptachsen der beiden Mikrofone entsteht.

Als „Aufnahmewinkel“ bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Schalleinfallsrichtungen, die das Klanggeschehen gerade aus einem der beiden Lautsprecher lokalisieren lassen. Nach DIN 60268 wird ein Schallereignis aus einem der beiden Lautsprecher lokalisiert, wenn die Pegeldifferenz zwischen den Signalen für linken und rechten Kanal zwischen 15 und 18 dB betragen.

Der „Akzeptanzwinkel“ ist der Winkel zwischen den Richtungen, die die größte Pegeldifferenz zwischen linken und rechtem Kanal aufweisen.

2.2 Gegeben sei ein stereofones Aufnahmesystem nach dem XY-Verfahren aus zwei Mikrofonen in Nierencharakteristik mit 90° Öffnungswinkel.

Welche Pegeldifferenz zwischen linkem und rechtem Kanal erzeugt eine Schallquelle aus 45° Einfallsrichtung und aus 90° Einfallsrichtung (seitlicher Schalleinfall) ?



Die Pegeldifferenz ergibt sich als logarithmisches Maß des Verhältnisses von linken und rechtem Kanal:

$$\Delta L = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

Der Öffnungswinkel α (=Hauptachsenwinkel) beträgt laut Aufgabenstellung 90° (= π/2).
Bei einer Schalleinfallsrichtung von θ = 45° (=π/4) beträgt die Pegeldifferenz zwischen linken und rechtem Kanal demnach:

$$\Delta L_{45°} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5}{1}\right)$$

$$= -6{,}02dB$$

Und bei einer Schalleinfallsrichtung von 90°:

$$\Delta L_{90°} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= -15{,}3dB$$

2.3 Wo werden die beiden Schallquellen bei der stereofonen Wiedergabe auf der Lautsprecherbasis abgebildet ?

Folgende Richtwerte gelten für die Auslenkung auf der Stereobasis:

Auslenkung	0%	25%	50%	75%	100%
Pegeldifferenz	0 dB	3 dB	6,5 dB	10 dB	16 dB

Demnach ergibt sich für eine Schalleinfallsrichtung aus 45° (Pegeldifferenz: -6 dB) eine Auslenkung von etwas weniger als 50%, bei 90° (Pegeldifferenz 15,3 dB) eine Lokalisierung bei fast 100%.

2.4 Welchen Hauptachsenwinkel muss man bei einem XY-System mit zwei Nieren einstellen, um einen Aufnahmewinkel von 120° zu erhalten?

Hinweis: Verwenden sie folgende Zusammenhänge:

1. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

2. $a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, mit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

Um den Öffnungswinkel errechnen zu können, ist es notwendig, die Gleichung aus Aufgabe 2.2 nach α umzustellen:

$$\Delta L = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

$$10^{\frac{\Delta L}{20}} = \frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}$$

$$10^{\frac{\Delta L}{20}}\left(A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right) = A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right) = A + B\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right)$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - A + \underbrace{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)\sin\theta}_{a}\sin\frac{\alpha}{2} + \underbrace{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)\cos\theta}_{b}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - A + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)^2 \sin^2\theta + \left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)^2 \cos^2\theta}}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)\cos\theta}{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)\sin\theta}\right)$$

Im Falle zweier Nierencharakteristiken sind A und B jeweils = 0,5. Der Aufnahmewinkel soll 120° betragen, demnach soll also bei einem Winkel von θ = 60° (= π/3) eine Pegeldifferenz von ΔL = -16 dB erreicht sein, bzw. bei einem Winkel von θ = -60° (= -π/3) eine Pegeldifferenz von ΔL = 16 dB.

Es ergibt sich nach Einsetzen der Werte ein Öffnungswinkel von:

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{0{,}5 - 0{,}5 \cdot 10^{\frac{-16}{20}}}{\sqrt{\left(0{,}5 \cdot 10^{\frac{-16}{20}} + 0{,}5\right)^2 \cos^2\frac{\pi}{3} + \left(0{,}5 \cdot 10^{\frac{-16}{20}} + 0{,}5\right)^2 \sin^2\frac{\pi}{3}}}\right) - 2 \cdot \frac{\left(0{,}5 \cdot 10^{\frac{-16}{20}} - 0{,}5\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\left(0{,}5 \cdot 10^{\frac{-16}{20}} + 0{,}5\right)\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\approx 2{,}56 \,\hat{=}\, 147°$$