Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 7. Aufgabenblatt

1. Mikrofone

1.1 Was versteht man unter dem (Feld-)Übertragungsfaktor eines Mikrofons?

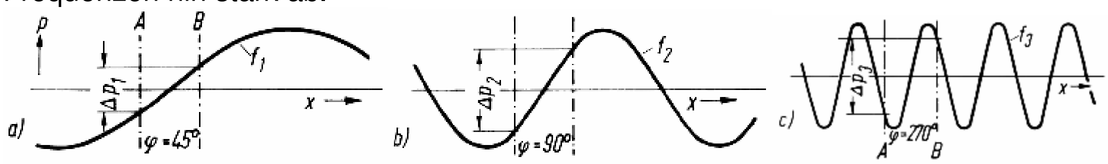
Der Übertragungsfaktor eines Mikrofons (engl. Sensitivity) ist das Verhältnis von ausgegebener Spannung zu anliegendem Schalldruck:

$$B = \frac{U}{p}$$

Er wird in $\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{Pa}}$ angegeben.

1.2 Welche Komponenten haben einen Einfluss auf den Frequenzgang eines Mikrofons und in welcher Weise beeinflussen sie ihn?

1. Kapselkonstruktion
Druckempfänger weisen bei frontalem Schalleinfall einen konstanten Frequenzgang auf. Der Frequenzgang von Druckgradientenempfängern hingegen fällt zu tiefen Frequenzen hin stark ab.



2. Wandlerprinzip
Man unterscheidet zwischen Auslenkungsempfängern (z.B. Kondensatormikrofone) und Geschwindigkeits-Emfängern (z.B. elektrodynamische Mikrofone / Tauchspulenmikrofone).
Im ebenen Schallfeld ergibt sich bei konstanten Druck über alle Frequenzen eine konstante Geschwindigkeit ($Z_0 = \frac{p}{v} = \mathrm{const}$). Da die Auslenkung das Integral der Geschwindigkeit ist, ergibt sich ein Abfall mit 1/jω.

$$s = \hat{s} \cdot e^{j\omega t}$$

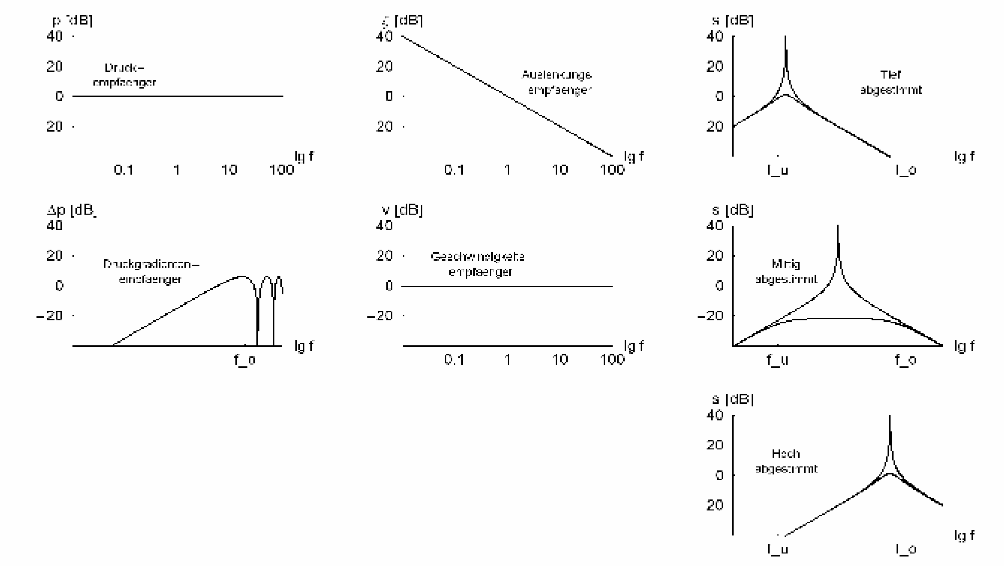
$$v = \frac{d}{dt} s = j\omega\hat{s} \cdot e^{j\omega t} = j\omega s$$

$$a = \frac{d}{dt} v = -\omega^2 \hat{s} \cdot e^{j\omega t} = -\omega^2 s = j\omega v$$

$$\Rightarrow s = \frac{v}{j\omega}$$

3. Abstimmung
Durch die Lage der Resonanzfrequenz der Mikrofonmembran lässt sich der Frequenzgang ebenfalls beeinflussen. Man unterscheidet zwischen tief abgestimmten, mittenabgestimmten und hoch abgestimmten Membranen.

Die bauartbedingten Frequenzgänge ergeben sich wir folgt:



1.3 Welchen prinzipiellen Frequenzgang weist ein Mikrofon auf, das 1. auf den Schalldruck reagiert, 2. als Auslenkungsempfänger arbeitet und 3. hoch abgestimmt ist?

Der Frequenzgang des Mikrofons ergibt sich aus der Überlagerung der Frequenzgänge, die sich durch die einzelnen Komponenten ergeben. In diesem Fall also den Frequenzgang eines Druckempfängers (idealerweise über den gesamten Frequenzbereich konstant), eines Auslenkungsempfängers (Abnahme mit 1/ω also 6dB/Oktave) und einer hohen Abstimmung (Zu- und Abnahme unterhalb und oberhalb der Grenzfrequenz mit 6dB/Oktave).

Qualitativ ergibt sich demnach ein Frequenzgang, der bis zur Resonanzfrequenz der Membran konstant verläuft, da sich die Frequenzgänge, die sich durch den Auslenkungsempfänger und die hohe Abstimmung ergeben sich kompensieren. Oberhalb der Resonanzfrequenz fällt der Frequenzgang schließlich mit 12dB/Oktave ab.

1.4 Wodurch ist die obere Grenzfrequenz des Systems gegeben und wie lässt sie sich konstruktiv nach oben ausdehnen?

Die obere Grenzfrequenz ist durch die Resonanzfrequenz der Membran gegeben. Um diese Frequenz weiter nach oben zu verschieben, wäre es denkbar, die Membran stärker einzuspannen, bzw. die Masse der Membran zu verkleinern.

2. Richtcharakteristik von Mikrofonen

Die Gleichung für die ideale Richtcharakteristik von Mikrofonen lautet

$s(\theta) = A + B \cos\theta$

$s(\theta)$: Übertragungsfaktor
A: Druckanteil
B: Gradientenanteil
mit $A+B = 1$

2.1 Berechnen und plotten Sie die idealen Richtcharakteristiken „Kugel", „Niere" und „Superniere" in Matlab.

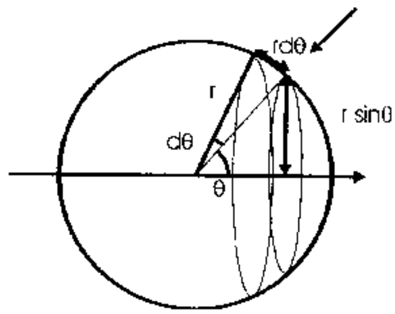
Siehe Matlab-File „polardiagramm2d".

2.2 Als Bündelungsgrad γ bezeichnet man das Verhältnis der von einem idealen Kugelmikrofon aufgenommenen Leistung zu der von einem gerichteten Mikrofon mit gleichem Übertragungsfaktor aufgenommenen Leistung.

Als relativer Abstandsfaktor (Distance Faktor DSF) bezeichnet man das Verhältnis des Abstandes, in dem ein gerichtetes Mikrofon weiter von einer Schallquelle im Raum positioniert werden kann als ein ideales Kugelmikrofon bei gleichem aufgenommenen Direkt-Diffus-Verhältnis.

Leiten Sie in Abhängigkeit der Größen A und B einen Ausdruck für den Bündelungsgrad des Mikrofons her.

Hinweis:
Das durch die Winkeländerung $d\theta$ gegebene Flächenelement auf einem Kreis mit dem Radius r hat die Fläche
$dA = r\, d\theta\, 2\pi\, r \sin\theta$



Mathematisch lässt sich der Bündelungsgrad also wie folgt ausdrücken:

$$\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}}$$

Allgemein gilt für die Schallleistung, die auf das Mikrofon einwirkt:

$$P = \int_S I dS$$

$$= \int_S \frac{p^2}{\rho c} dS$$

Die vom Mikrofon *aufgenommene* Schalleistung entspricht dieser jedoch nicht, sondern wird zusätzlich von der Richtcharakteristik des Mikrofons beeinflusst:

$$P = \int_S \frac{(p \cdot s(\theta))^2}{\rho c} dS$$

Dabei gibt s(θ) winkelabhängig und dimensionslos die Richtcharakteristik des Mikrofons an. Der einfallende Schalldruck wird um den Wert von s(θ) vermindert.

Die Gleichungen der idealen Richtcharakteristiken ergeben sich zu:
$s(\theta) = A + B\cos(\theta)$.

Die Werte für A und B bestimmen die Richtcharakteristik, A und B summieren sich immer zu 1, sodass s(0°) = 1 für alle Charakteristiken gilt.

Im Falle einer Kugelcharakteristik gilt A = 1 und B = 0. Damit ist die vom Mikrofon aufgenommene Schallleistung gleich der vor dem Mikrofon vorhandenen Schallleistung. Im Falle einer Kugeloberfläche ergibt sich also:

$$\begin{aligned} P_{Kugel} &= \int_S \frac{(p \cdot (A + B\cos(\theta)))^2}{\rho c} dS \\ &= \frac{(p \cdot 1)^2}{\rho c} \cdot \int_S dS \\ &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Für eine beliebige Richtcharakteristik gilt:

$$\begin{aligned} P_{Richt} &= \int_S \frac{(p \cdot s(\theta))^2}{\rho c} dS \\ &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_S s^2(\theta) dS \end{aligned}$$

Es ist also das Integral über die Oberfläche der Richtcharakteristik zu berechen. Da die Richtcharakteristik rotationssymmetrisch zur 0°-Richtung ist, ist dies am einfachsten zu lösen, wenn man infinitesimal kleine Kugelschichten betrachtet (siehe Abbildung der Aufgabenstellung).

Herleitung des infinitesimal kleinen Flächenelements dS:
Die Oberfläche einer solchen Kugelscheibe ergibt sich durch den Umfang der Scheibe multipliziert mit deren Breite. Der Umfang wiederum ergibt sich durch den jeweiligen Radius multipliziert mit 2π: $U = 2\pi \cdot r' = 2\pi \cdot r \sin(\theta)$.
Die Breite ergibt sich durch Überlegungen zu den Verhältnissen des Kreises. In einem Kreis verhalten sich stets die Längen der Kreisabschnitte wie die zugehörigen Winkel. In unserem Fall also:
$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{x}{2\pi r}$, dabei ist x die Breite der Scheibe.
Löst man die Gleichung nach x auf ergibt sich:
$x = r \cdot d\theta$
Die Oberfläche der Kreisscheibe ergibt sich also durch $dS = r \cdot d\theta \cdot 2\pi \cdot r \sin(\theta)$

Die Leistung berechnet sich schließlich nach:

$$
\begin{aligned}
P_{Richt} &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi (A + B\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(A^2 \int_0^\pi \sin(\theta) \mathrm{d}\theta + 2AB \int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta + B^2 \int_0^\pi \cos^2(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(A^2 \left[-\cos^2(\theta)\right]_0^\pi + 2AB \left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_0^\pi + B^2 \left[-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right]_0^\pi \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + 0 + \frac{2}{3} B^2 \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + \frac{2}{3} B^2 \right)
\end{aligned}
$$

Der Bündelungsgrad ergibt sich demnach zu:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}} \\
&= \frac{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2}{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + \frac{2}{3} B^2 \right)} \\
&= \frac{1}{A^2 + \frac{1}{3} B^2}
\end{aligned}
$$

2.3 Leiten Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Bündelungsgrad γ und dem Distance Faktor ab und berechnen Sie den relativen Abstandsfaktor DSF für drei gängige Richtcharakteristiken (Breite Niere, Niere, Superniere) aus den Ergebnissen von 3. und einem idealisierten Verlauf von Direkt- und Diffusfeld im Raum.

Am gleichen Punkt im Raum hat ein gerichtetes Mikrofon ein größeres Direkt-Diffusschall-Verhältnis als ein ungerichtetes Mikrofon. Mit anderen Worten: ein gerichtetes Mikrofon nimmt am gleichen Punkt im Raum weniger Diffusschall auf als ein ungerichtetes Mikrofon. Um das gleiche Direkt-Diffusschall-Verhältnis zu erhalten muss man sich also mit dem gerichteten Mikrofon weiter von der Schallquelle entfernen, weil dort das Verhältnis von Direkt- zu Diffusschall des Raumes kleiner ist.

Im Raum überlagert sich an jedem Punkt das Direktschallfeld einer Schallquelle mit dem Diffusschallfeld. Der Schalldruck des Diffusschallfelds ist dabei im gesamten Raum konstant, während der Schalldruck des Direktfeldes mit 1/r abnimmt. Somit nimmt auch das Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall mit 1/r ab:

$$\frac{Direktschalldruck}{Diffusschalldruck} \propto \frac{1}{r}$$

Das von einem Mikrofon aufgenommene Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall lässt sich ausdrücken durch das Verhältnis aus dem Übertragungsfaktor in 0°-Richtung -also dem, was von vorne aufgenommen wird- zu dem was von allen anderen Seiten aufgenommen wird, also der Mittelung des Übertragungsfaktors über alle Raumrichtungen: $\frac{M_0(0°)}{M_{diffus}}$, mit $M_{diffus} = M_0(0°) \cdot \int_S (A + B\cos(\theta))d\theta$

Im Falle einer Kugelcharakteristik gilt also: $\frac{M_{0,ungerichtet}(0°)}{M_{diffus,ungerichtet}} = 1$

Um also das gleiche Verhältnis von Direkt- und Diffusschall zu erhalten, wie es ein ungerichtetes Mikrofon aufweist, ist es notwendig, das Direktschall-Diffusschall-Verhältnis des gerichteten Mikrofons um einen Faktor zu verringern.

$$\frac{M_{0,ungerichtet}(0°)}{M_{0,ungerichtet,diffus}} = c \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}}$$

$$1 = c \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}}$$

Da der Diffusschall im Raum und daher auch die Aufnahme durch das Mikrofon konstant ist, kann dies nur dadurch erreicht werden, dass die Aufnahme des Direktschalls verringert wird. Dies wiederum ist dann der Fall, wenn das Mikrofon weiter entfernt von der Schallquelle steht und dadurch entsprechend weniger Direktschall aufnimmt. Geht man davon aus, dass das Kugelmikrofon einen Abstand von 1 aufweist, der Schalldruck mit 1/r abnimmt, und dass *DSF* die Entfernung bezeichnet, an der dies erreicht ist, dann ergibt sich der Faktor zu $c = \frac{1}{DSF}$.

Der Zusammenhang zwischen Bündelungsgrad und Distance Factor ergibt sich mit $\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}} = \left(\frac{M_0(0°)}{M_{diffus}}\right)^2$:

$$1 = \frac{1}{DSF} \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}}$$
$$= \frac{1}{DSF} \cdot \sqrt{\gamma}$$
$$\Rightarrow DSF = \sqrt{\gamma}$$

Die Abstandsfaktoren für die Breite Niere (A=0.667, B=0.333), Niere (A=0.5, B=0.5) und die Superniere (A=0.366, B =0.634) ergeben sich also zu:

$$DSF_{\text{Breite Niere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Breite Niere}}} = \sqrt{\left(A^2 + \frac{1}{3}B^2\right)^{-1}} = \sqrt{\left(0.667^2 + \frac{1}{3}0.333^2\right)^{-1}} = 1{,}44$$
$$DSF_{\text{Niere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Niere}}} = \sqrt{\left(0.5^2 + \frac{1}{3}0.5^2\right)^{-1}} = 1{,}73$$
$$DSF_{\text{Superniere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Superniere}}} = \sqrt{\left(0.366^2 + \frac{1}{3}0.634^2\right)^{-1}} = 1{,}93$$