Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 5. Aufgabenblatt

1. Moden

1.1 Erläutern Sie, was in der Raumakustik unter „Raummoden“ verstanden wird.

Der Begriff einer „stehenden Welle“ lässt sich am anschaulichsten anhand zweier sich parallel gegenüberstehender Wände veranschaulichen, zwischen denen eine ebene Schallwelle parallel zu den Wänden hin und her läuft. Durch die Reflexion an einer schallharten Wandfläche überlagern sich hin- und rücklaufende Wellen. Sinusförmige Schallwellen, deren halbe Wellenlänge (oder ganzzahlige Vielfache der halben Wellenlänge) mit dem Abstand der Wände übereinstimmen, überlagern sich dabei derart, dass sich die Maxima und Minima des resultierenden Schalldrucks an festen Orten ausbilden. Die entsprechenden Frequenzen, bei denen sich stehende Wellen zwischen zwei parallelen Wänden ausbilden, lassen sich wie folgt berechnen:

$$d = n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot \frac{f}{2c} \Rightarrow f = n \cdot \frac{c}{2d}$$

Raummoden sind nichts anderes als stehende Wellen und bilden sich in jedem Raum aus (auch in solchen, die keine sich parallel gegenüberstehenden Wände besitzen). An den entsprechenden Frequenzen treten in der Übertragungsfunktion des Raumes Maxima auf.

1.2 Erläutern sie, was unter axialen, tangentialen und obliquen Moden eines quaderförmigen Raumes zu verstehen ist.

Axiale Moden sind solche Moden, die durch die Reflexion von Schallwellen an nur einem gegenüberliegenden Wandpaar entstehen, also entweder zwischen Vorder- und Rückwand, zwischen den beiden Seitenwänden, oder zwischen Decke und Boden. Tangentiale Moden hingegen entstehen durch Reflexion an zwei Wandpaaren und oblique Moden schließlich durch Reflexion an allen drei Wandpaaren.

Die Berechnung der Moden erfolgt nach der Formel:

$$f_{lmn} = \frac{c}{2}\sqrt{(\frac{l}{L_x})^2 + (\frac{m}{L_y})^2 + (\frac{n}{L_z})^2}$$

Darin sind L_x, L_y und L_z die Abmessungen des Raumes, also Länge, Breite und Höhe. l, m und n bezeichnen die Ordnungszahlen der Moden und sagen gleichzeitig, wie viele Druckknoten sich zwischen den Wänden in den jeweiligen Richtungen ausbilden. So bezeichnet l=1, m=0 und n=0 die erste Mode in x-Richtung, die auch als 1-0-0-Mode bezeichnet wird und genau einen Druckknoten zwischen den Wänden aufweist. Die 2-1-0 Mode enthält zwei Druckknoten in x-Richtung, einen Knoten in y-Richtung und keinen in z-Richtung.

1.3 Veranschaulichen Sie die Mode der Ordnung 3-2-0 für einen 6m langen und 4m breiten Raum mit rechteckförmigem Grundriss mithilfe von Matlab. Plotten Sie dazu zunächst den Verlauf des Schalldrucks im Raum zu einem festen Zeitpunkt mithilfe der Funktion `image()`. Betrachten Sie schließlich den Verlauf des Schalldrucks über der Zeit. Teilen Sie dazu eine Schwingungsperiode in 50 diskrete Zeitpunkte auf und plotten Sie für jeden dieser Zeitpunkte den Verlauf des Schalldrucks im Raum. Geben sie die Animation mithilfe der Funktion `movie()` wieder.

Der Schalldruckverlauf ergibt sich durch die Gleichung

$$p_{lmn}(x,y,z) = C\cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)\cos\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right)\cdot e^{j\omega t}$$

Für den Plot zu einem festen Zeitpunkt setzen wir t=0, die Amplitude des Schalldrucks setzen wir hier zu C=1. Durch die Tatsache, dass die Ordnung in z-Richtung =0 ist, ergibt sich der Schalldruckverlauf in diesem konkreten Fall durch die Gleichung:

$$p_{lmn}(x,y) = \cos\left(\frac{3\pi x}{6m}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{4m}\right)$$

Mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil 2 lässt sich die Frequenz der 3-2-0-Mode berechnen. Sie ergibt sich zu

$$f = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{6m}\right)^2 + \left(\frac{2}{4m}\right)^2} \approx 95Hz$$

Dementsprechend lässt sich ω durch $\omega = 2\pi f$ berechnen und t läuft genau eine Periode von t = 0 bis t = 1/f.

Matlab-Code siehe Matlab-File „Aufgabe1_3.m“

1.4 Betrachten Sie zwei Räume mit dem in etwa gleichen Volumen von $27m^3$. Raum 1 habe die Abmessungen 2,93m x 3,58m x 2,57m, Raum 2 die Abmessungen 3m x 3m x 3m. Plotten sie für diese beiden Räume mithilfe von Matlab die Moden im Bereich von 0 bis 150 Hz. Welche Unterschiede in den Modenspektren können sie feststellen und wirken sich diese auf den Klangeindruck des Raumes aus?

Siehe Matlab-File „Aufgabe1_4.m“

Es lassen sich in den beiden Plots zwei Dinge feststellen:

1. Die Modendichte, also die Anzahl der Moden in einem bestimmten Frequenzband, nimmt mit steigender Frequenz zu. Dieses lässt sich sowohl im Plot des würfelförmigen Raums erkennen, deutlicher jedoch wird es jedoch im Plot des ersten Raums.
2. Die Modendichte ist im Falle von Raum 1 deutlich höher als in Raum zwei. Der würfelförmige Raum hat die Eigenschaft, dass sich die Moden bei exakt den selben Frequenzen ausbilden. Die 1-0-0-Mode hat somit die gleiche Frequenz wie die 0-1-0-Mode und die 0-0-1 Mode. Gleiches gilt beispielsweise für die Moden 1-2-2, 2-1-2 und 2-2-1.

Jede Eigenfrequenz/Raumresonanz hat eine Verstärkung des Frequenzgangs des Raums an der entsprechenden Frequenzstelle zur Folge. Dies wirkt sich insbesondere in Bereichen mit geringer Eigenfrequenzdichte störend aus. Die Überhöhung ist hier deutlich zu hören, weil in den benachbarten Frequenzbereichen keine Moden zu finden sind. Im Falle von hohen Eigenfrequenzdichten verschmelzen die Eigenfrequenzen in machen sich nicht als einzelne Überhöhungen im Frequenzgang bemerkbar.

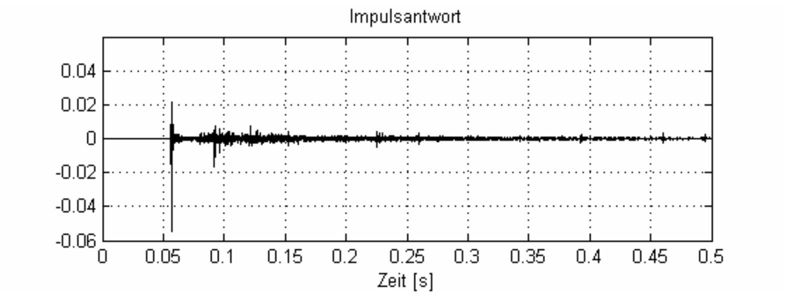
1.5 Betrachten sie nun erneut den Raum 1 aus der vorherigen Teilaufgabe, sowie einen Raum mit den jeweils doppelten Abmessungen und plotten sie auch diese beiden. Welche Unterschiede können sie hier feststellen?

Abgesehen von den Raumproportionen spielt auch die Raumgröße eine Rolle. In größeren Räumen ist generell auch in tieferen Frequenzbereichen eine hohe Eigenfrequenzdichte festzustellen als bei kleineren Räumen mit gleichen Proportionen.

Kleine quaderförmige Räume mit ganzzahligen Wandlängenverhältnissen sind daher besonders gefährdet, eine ungünstige Modenverteilung aufzuweisen. Das Problem kleiner Räume stellt sich häufig bei Regieräumen von Tonstudios.

2. Impulsantwort

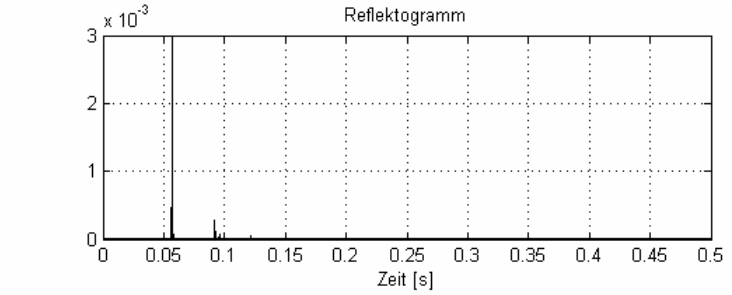
Gegeben sei eine Impulsantwort aus dem Audimax als wav-Datei. Berechnen Sie in Matlab aus der Impulsantwort



2.1 ein Reflektogramm als quadrierte Impulsanwort,

Reflektogramme sollen bestimmte Eigenschaften des Ausklingverhaltens deutlicher zum Ausdruck bringen als die Impulsantwort. Reflektogramme werden direkt aus der Impulsantwort abgeleitet. Als Reflektogramme bezeichnet man u.a. die Schallenergiedichte und die kumulierte Schallenergie.

Die Schallenergiedichte ist proportional zum Quadrat der Impulsantwort:
$w(t) \sim h^2(t)$



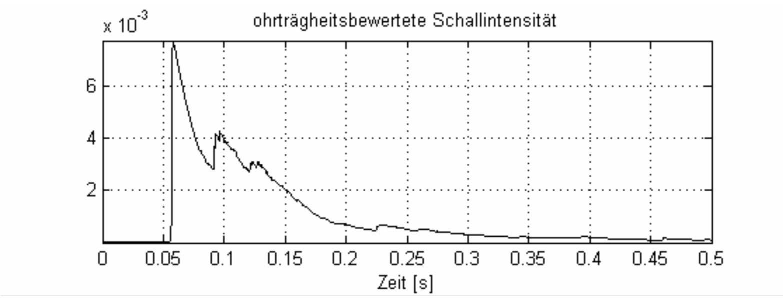
2.2 die ohrträgheitsbewertete Schallintensität mit einer Zeitkonstante von 25 ms und

Für die ohrträgheitsbewertete Schallintensität gilt die Gleichung:
$$I_{\tau_0}(t) \sim \int_0^t h^2(t') \cdot e^{\left(\frac{t'-t}{\tau_0}\right)} \cdot dt'.$$
Dies entspricht einer Faltung der quadrierten Impulsantwort mit einer Exponentialfunktion:

$$h^2(t) * e^{-\frac{t}{\tau_o}} = \int h^2(t') \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau_o}} dt'$$
$$= \int h^2(t') \cdot e^{\frac{t'-t}{\tau_o}} dt'$$

Dabei gilt für die beiden Funktionen:
$h(t) = 0$ für $t < 0$ und
$e^{-\frac{t}{\tau_0}} = 0$ für $t < 0$.

Als Zeitkonstante wird typischerweise 25 ms bzw. 35 ms verwendet.



2.3 eine Abklingkurve als rückwärtsintegrierte Impulsantwort.

Die rückwärtsintegrierte Impulsantwort ergibt sich zu:

$$R(t) = \int_t^{\infty} h^2(t)dt = \int_0^{\infty} h^2(t)dt - \int_0^{t} h^2(t)dt$$