Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 4. Aufgabenblatt

1. Diffuses Schallfeld

Meyer gibt für den statistischen Richtfaktor Γ_{st} der Trompete folgende Werte an:

Richtung	Trompete			
	2000 Hz	6000 Hz	10 000 Hz	15 000 Hz
0° (Trichterachse)	2,30	4,40	4,70	6,60
10°	2,21	3,85	4,40	4,40
20°	1,92	3.18	3,35	3,05
30°	1,85	2,35	1,85	1,60
40°	1,78	1,30	1,10	0.87
50°	1,30	0,86	0.75	0,65
60°	1,10	0,60	0.50	0,56
70°	0,94	0,39	0,47	0,51
80°	0,85	0,24	0,32	0,46
90° (seitlich)	0,75	0,15	0,22	0,28

1.1 Erläutern Sie die Bedeutung des statistischen Richtfaktors.

Es muss unterschieden werden zwischen *Richtfaktor* bzw. *Richtungsfaktor* und *statistischem Richtfaktor* bzw. *statistischem Richtungsfaktor*.

Nach „DEGA-Empfehlung 101, Akustische Wellen und Felder, März 2006":
„Der *Richtfaktor* eines Schallstrahlers ist das Verhältnis der komplexen Amplitude des Fernfeldschalldrucks unter einem bestimmten Winkel und in einem bestimmten Abstand von der Schallquelle zur entsprechenden Schalldruckamplitude in der Bezugsrichtung bei demselben Abstand zur Schallquelle: $\underline{\Gamma} = \frac{\underline{p}(\varphi, \vartheta)}{\underline{p}(\varphi_0, \vartheta_0)}$

Als Bezugsrichtung wird in der Regel eine geometrische Symmetrieachse des Strahlers bzw. die Richtung maximaler Schallabstrahlung gewählt."

Im Falle der Trompete wäre die Bezugsrichtung z.B. die Trichterachse. Da in der Regel die Bezugsrichtung gleich der Richtung maximaler Abstrahlung ist, ist der Betrag des Richtungsfaktors zumeist ≤ 1. Im Falle einer kugelförmigen Abstrahlung wäre er an jedem Punkt im Raum = 1.

Nach DEGA-Empfehlung 101:
„Der *statistische Richtfaktor* eines Schallstrahlers ist das Verhältnis der komplexen Amplitude des Fernfeldschalldruckes unter einem bestimmten Winkel gegen die

Bezugsachse des Schallstrahlers und in einem bestimmten Abstand von der Schallquelle zur entsprechenden komplexen Schalldruckamplitude, den eine ungerichtet strahlende Schallquelle (Kugelstrahler nullter Ordnung) gleicher Schallleistung bei gleichem Abstand der Aufpunkte vom Schallstrahler erzeugen würde. Er ist also auch das Verhältnis des Schalldruckes in einer bestimmten Richtung zum Mittelwert des Schalldruckes über alle Abstrahlrichtungen, bei jeweils gleichem Aufpunktabstand.“

1.2 Berechnen Sie für die 4 Frequenzen und 10 Einfallsrichtungen die Hallabstände einer Trompete in der Berliner Philharmonie (V=26.000 m^3, T=2.0 s). Stellen Sie den richtungsabhängigen Hallabstand als Matlab-Plot dar.

Siehe Matlab-File „Aufgabe1.m“.

Der Hallabstand bezeichnet den Abstand, an dem Direkt- und Diffusschallpegel gleich groß sind. Da der Diffusschallpegel im gesamten Raum annähernd konstant ist, ist der Hallabstand ein Maß dafür, wie groß der Direktschallpegel in einem bestimmten Frequenzbereich in einer bestimmten Richtung ist. Ist der Direktschall nämlich sehr groß, so ist ein längerer Weg erforderlich, bis der Direktschalldruckpegel auf den Pegel des Diffusschalldrucks abgesunken ist, als bei kleineren Direktschalldrücken. Man kann anhand des Plots ablesen, dass die Trompete hohe Frequenzen sehr gerichtet abstrahlt, zu tiefen Frequenzen hin jedoch zunehmend ungerichtet wird.

1.3 Die erste Reihe in der Berliner Philharmonie sei 5 m, die letzte Reihe 40 m von der Trompete entfernt. Wie hoch ist die Schallpegeldifferenz für die beiden Hörpositionen (in 0°-Richtung der Quelle) 1. ohne Berücksichtigung des Raumes (Freifeld) und 2. mit Berücksichtigung des Raumes?

Ohne Berücksichtigung des Raumes, also im Freifeld nimmt der Schalldruck der Quelle mit 1/r ab. Daher ergibt sich als Pegeldifferenz:

$$\Delta L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_{frei}(40m)^2}{p_{frei}(5m)^2}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1/40}{1/5}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{5}{40}\right) = -18{,}06 dB$$

Berücksichtigt man den Raum mit, dann überlagern sich die Schalldrücke von Freifeld und Diffusfeld, da es eine Überlagerung von inkohärenten Signalen ist, addieren sich die Leistungen. Für das Diffusfeld wird davon ausgegangen, dass der Schalldruck im gesamten Raum konstant ist.
An der Stelle des Hallradius sind die Schalldruckwerte von Frei- und Diffusfeld gleich groß. Dementsprechend lässt sich der Wert des Schalldrucks im Diffusfeld berechnen durch den Freifeld-Schalldruck an der Stelle des Hallradius.
Die Pegeldifferenz ergibt sich demnach in Abhängigkeit von r_1, r_2 (40m u. 5m) und r_H wie folgt:

$$\Delta L = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{p_{frei+diffus}(r_1)^2}{p_{frei+diffus}(r_2)^2}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1/r_1^2 + 1/r_H^2}{1/r_2^2 + 1/r_H^2}\right) = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1/r_1^2 + 1/r_H^2}{1/r_2^2 + 1/r_H^2}\right)$$

Die vier verschiedenen Hallradien bei 2, 6, 10 und 15 kHz ergeben sich zu 14,9 m, 28,6 m, 30,5 m und 42,9 m.

Demnach ergeben sich folgende Pegeldifferenzen zwischen den Entfernungen 5m und 40m:
$\Delta L_{2\,kHz}$ = -9,4 dB

$\Delta L_{6\ kHz}$ = -13,5 dB
$\Delta L_{10\ kHz}$ = -13,8 dB
$\Delta L_{15\ kHz}$ = -15,4 dB

1.4 Wie verändert sich der Hallabstand (qualitativ), wenn sich die Trompete statt in der Berliner Philharmonie in einem typischen Aufnahmestudio (V=1000 m^3, T=1 s) befindet?

Das Verhältnis der Hallabstände ergibt sich wie folgt:

$$\frac{r_{H,Studio}}{r_{H,Konzertsaal}} = \frac{0{,}057 \cdot \Gamma_{st} \cdot \sqrt{\frac{V_{Studio}}{T_{Studio}}}}{0{,}057 \cdot \Gamma_{st} \cdot \sqrt{\frac{V_{Konzertsaal}}{T_{Konzertsaal}}}} = \sqrt{\frac{V_{Studio}/T_{Studio}}{V_{Konzertsaal}/T_{Konzertsaal}}}$$

$$\Rightarrow r_{H,Studio} = r_{H,Konzertsaal} \cdot \sqrt{\frac{V_{Studio}/T_{Studio}}{V_{Konzertsaal}/T_{Konzertsaal}}}$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich: $r_{H,Studio} = 0{,}28 \cdot r_{H,Konzertsaal}$.

Der Hallradius im Studio ist somit deutlich kleiner als im Konzertsaal.

2. Akustik

Als mittlere Schallleistung eines männlichen Sprechers wird ein Wert von $7 \cdot 10^{-6}$ W ermittelt.

2.1 Berechnen Sie den mittleren Schalleistungspegel in dB.

$$L_P = 10 \log \frac{P}{P_0} = 10 \log \frac{7 \cdot 10^{-6} W}{10^{-12} W} = 68{,}45 dB$$

2.2 Berechnen Sie unter Annahme omnidirektionaler Schallabstrahlung den mittleren Schallintensitätspegel und den mittleren Schalldruckpegel des Sprechers im Freifeld in 10 m Entfernung. [Luftdichte ρ = 1.19 kg/m³ bei 20 °C]

allgemein gilt: $P = \int \vec{I} d\vec{S}$

Da in diesem Fall die Vektoren $\vec{I}$ und $\vec{S}$ in die gleiche Richtung zeigen, lässt sich die Leistung berechnen durch: $P = I \cdot S$, wobei S hier eine Kugeloberfläche ist, also $S = 4\pi r^2$.

Die Intensität ergibt sich demnach zu

$$I = \frac{P}{S} = \frac{7 \cdot 10^{-6} W}{4\pi \cdot 100 m^2} = 5{,}57 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2},$$

und der Intensitätspegel zu

$$L_I = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{5{,}57 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2}}{10^{-12} \frac{W}{m^2}} = 37{,}46 dB$$

Unter der Annahme, dass wir uns im Fernfeld befinden ergibt sich der Schalldruck durch die Gleichung

$$I = \frac{p^2}{\rho c} \Rightarrow p = \sqrt{I \cdot \rho c} = \sqrt{5{,}57 \cdot 10^{-9} \frac{W}{m^2} \cdot 1{,}19 \frac{kg}{m^3} \cdot 340 \frac{m}{s}} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} Pa$$

Der Schalldruckpegel berechnet sich zu:

$$L_p = 20 \cdot \log \frac{p}{p_0} = 20 \cdot \log \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3} Pa}{2 \cdot 10^{-5} Pa} = 37{,}50 dB$$

2.3 Begründen Sie, warum man für die Berechnung des Schalldruckpegels in 2.2 für eine Quelle mit diesen spektralen Eigenschaften und in dieser Entfernung ein näherungsweise ebenes Schallfeld annehmen kann.

Eine Fernfeldbedingung besagt, dass man in ausreichender Entfernung von einer Kugelschallquelle ein ebenes Schallfeld annehmen kann. In diesem Fall sind Druck und Schnelle in Phase (siehe Aufgabenblatt 3). Die mathematische Formulierung des Kriteriums lautet: $r > \frac{\lambda}{2\pi}$, bzw. (nach Umformung) $1 > \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}}_{k} r = kr$

Wie man der Gleichung entnehmen kann, befindet man sich für kleine Wellenlängen (hohe Frequenzen) bereits in geringerer Entfernung zur Schallquelle im Fernfeld als für große Wellenlängen (tiefe Frequenzen). Bei einem männlichen Sprecher kann man als tiefste Frequenz ca. 100 Hz annehmen.

Bei 100 Hz ergibt sich eine Wellenlänge von $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{344\frac{m}{s}}{100Hz} = 3{,}44m$.

Man befindet sich also für Abstände $r > \frac{3{,}44m}{2\pi} \approx 0{,}55m$ für alle Frequenzen im Fernfeld.

2.4 Wie verändert sich der in 2.2 für den mittleren Schalldruckpegel berechnete Wert in der 0°-Richtung, wenn der Sprecher einen Bündelungsgrad von $\gamma = 2$ besitzt?

Zum Bündelungsgrad (aus: „DEGA-Empfehlung 101, Akustische Wellen und Felder, März 2006"):

„Bündelungsgrad: $\gamma = \frac{P_{\text{Kugel, mit }\tilde{p}_{\max}}}{P_{\text{realer Strahler}}}$

Der Bündelungsgrad ist das Verhältnis der Schallleistung eines fiktiven Kugelstrahlers nullter Ordnung, dessen allseitig gleicher Schalldruck gleich dem maximal abgestrahlten Schalldruck des realen Strahlers ist, zur Schallleistung des realen Schallstrahlers. Der Bündelungsgrad ist damit der Kehrwert des über alle Raumrichtungen in einer Kugeloberfläche gemittelten Quadrates des Richtfaktors. (…) Der Bündelungsgrad charakterisiert in einer Ein-Zahl-Angabe den Grad der Bündelung bzw. der Richtwirkung der abgestrahlten Schallleistung. Für den Bündelungsgrad gilt $\gamma \geq 1$."

Da die Schallleistung stets proportional zum Quadrat des Schalldrucks ist, ergibt sich der Schalldruck der gerichtet abstrahlenden Quelle wie folgt:

$$\gamma = 2 = \frac{P_{\text{Kugel, mit }\tilde{p}_{\max}}}{P_{\text{realer Strahler}}} = \frac{\tilde{p}^2_{\max}}{p^2_{\text{realer Strahler}}}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_{\max} = \sqrt{2} \cdot p_{\text{realer Strahler}}$$

Der Schalldruck in 0°-Richtung steigt also um den Faktor $\sqrt{2}$, der Schalldruckpegel erhöht sich also um 3dB.

2.5 Wie verändert sich der in 2.2 für den mittleren Schalldruckpegel berechnete Wert, wenn sich der Sprecher in einem typischen Hörsaal mit V = 1.000 m^3 und einer Nachhallzeit von T = 1 s befindet? Berechnen sie hierfür zunächst den Hallradius der Quelle, daraus den Diffusschallpegel und daraus den gesuchten Schalldruckpegel in 10 m Entfernung.

An der Stelle des Hallradius sind der Schalldruck und der Schalldruckpegel von Direkt- und Diffusschall gleich groß. Um also den Schalldruck des diffusen Schallfelds ermitteln zu können, ist es notwendig, den Schalldruck des Direktschalls an der Stelle des Hallradius zu berechnen.
Der Hallradius ergibt sich zu:

$$r_H = 0{,}057 \cdot \sqrt{\frac{V}{T}} = 0{,}057 \cdot \sqrt{\frac{1000m^3}{1s}} \approx 1{,}8m$$

Der Schalldruck des Diffusfelds ergibt sich also wie folgt:

$(P = I \cdot S\ ,\ I = p \cdot v\ ,\ Z = \frac{p}{v} \Rightarrow v = Z \cdot p\ ,\ Z_0 = \rho_0 c\ )$

$$p_{diff} = p_{dir,r_H} = \sqrt{\frac{P \cdot \rho_0 c}{4\pi r_H^2}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-6} W \cdot 1{,}19 \frac{kg}{m^3} \cdot 340 \frac{m}{s}}{4\pi \cdot (1{,}8m)^2}} = 8{,}39 \cdot 10^{-3}\, Pa$$

Der Schalldruckpegel des Diffusfelds beträgt demnach:

$$L_{p.diff} = 10 \log \frac{p}{p_0} = 10 \log \frac{8{,}39 \cdot 10^{-3}\, Pa}{2 \cdot 10^{-5}\, Pa} = 52{,}45 dB_{SPL}$$

Der Gesamtschalldruck ergibt sich durch Addition der Einzelschalldrücke, wobei darauf zu achten ist, dass es sich um inkohärente Signale handelt, bei denen sich also nicht einfach die Schalldrücke addieren, sondern die Leistungen der Signale Da zwischen Leistung und Schalldruck im Falle einer Kugelschallquelle ein quadratischer Zusammenhang besteht, ergibt sich die Summe wie folgt:

$$L_{p.ges} = 10 \log\left(\frac{p_{dir}^2}{p_0^2} + \frac{p_{diff}^2}{p_0^2}\right) = 10 \log\left(\frac{(1{,}51 \cdot 10^{-3}\, Pa)^2}{(2 \cdot 10^{-5})^2} + \frac{(8{,}39 \cdot 10^{-3}\, Pa)^2}{(2 \cdot 10^{-5})^2}\right) = 52{,}59 dB_{SPL}$$

2.6 Wie verändert sich der in 2.5 berechnete Wert, wenn im Hörsaal auf der Parkettfläche mit einem mittleren Absorptionsgrad von α = 0.1 100 m^2 Teppichboden mit einem mittleren Absorptionsgrad von α = 0.5 verlegt werden?

Die äquivalente Absorptionsfläche ohne das Absorbermaterial ergibt sich mithilfe des Sabine'schen Nachhallformel wie folgt:

$$T = 0{,}163 \cdot \frac{V}{A} \Rightarrow A = 0{,}163 \cdot \frac{V}{T} = 0{,}163 \cdot \frac{1000 m^3}{1s} = 163 m^2$$

Die neue äquivalente Absorptionsfläche ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A_{neu} &= A - \alpha_{Parkett} \cdot S + \alpha_{Teppich} \cdot S \\ &= 163 m^2 - 0.1 \cdot 100 m^2 + 0.5 \cdot 100 m^2 \\ &= 203 m^2 \end{aligned}$$

Die Nachhallzeit verringert sich also zu:

$$T_{neu} = 0{,}163 \cdot \frac{V}{A_{neu}} = 0{,}163 \cdot \frac{1000 m^3}{203 m^2} \approx 0.8 s$$

Als Hallradius ergibt sich nun:

$$r_{H,neu} = 0{,}057 \cdot \sqrt{\frac{V}{T_{neu}}} = 0{,}057 \cdot \sqrt{\frac{1000 m^3}{0{,}8 s}} \approx 2{,}01 m$$

Der neue Diffusschallpegel beträgt demnach

$$p_{diff,neu} = p_{dir}(r_{H,neu}) = \sqrt{\frac{P \cdot \rho_0 c}{4\pi r_{H,neu}^2}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{-6} W \cdot 1{,}19 \frac{kg}{m^3} \cdot 344 \frac{m}{s}}{4\pi \cdot (2{,}01 m)^2}} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-3}\, Pa\ ,$$

und als neuer Gesamtschalldruckpegel:

$$L_{p.ges} = 10\log\left(\frac{p_{dir}^2}{p_0^2} + \frac{p_{diff,neu}^2}{p_0^2}\right) = 10\log\left(\frac{\left(1{,}51 \cdot 10^{-3}\,Pa\right)^2}{\left(2 \cdot 10^{-5}\right)^2} + \frac{\left(7{,}5 \cdot 10^{-3}\,Pa\right)^2}{\left(2 \cdot 10^{-5}\right)^2}\right) = 51{,}66 dB_{SPL}$$

2.7 In 2.6 wurde ein mittlerer Absorptionsgrad zugrunde gelegt. Skizzieren sie, wie sich für einen Teppich mit 1.5 cm Materialtiefe Absorptionsgrad und resultierende Nachhallzeit *frequenzabhängig* verändern.

Poröse Absorber werden wirksam, wenn die Dicke des Absorbers größer ist als eine Viertel-Wellenlänge:

$$d \geq \frac{\lambda}{4}$$

Ersetzt man λ mit $\frac{c}{f}$, dann ergibt sich als Grenzfrequenz:

$$d \geq \frac{c}{4 \cdot f}$$

$$\Rightarrow f \geq \frac{c}{4 \cdot d} = \frac{344\,\frac{m}{s}}{4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,m} = 5{,}73 kHz$$