Kommunikationstechnik I

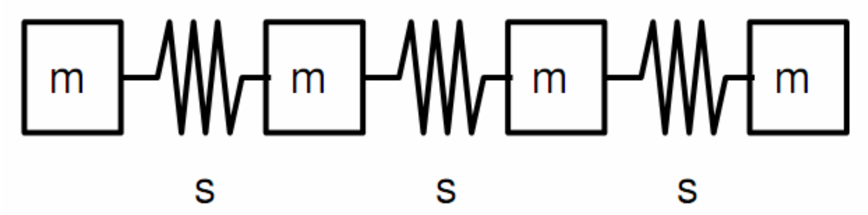
Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 2. Aufgabenblatt

1. Nahbesprechungseffekt

1.1 Nennen Sie die Schallfeldgleichungen (Kompressionsgesetz und Trägheitsgesetz) für den eindimensionalen, sowie für den mehrdimensionalen Fall.

Die Schallfeldgleichungen ergeben sich aus der Vorstellung, dass das Ausbreitungsmedium (die Luft) als ein einerseits elastisches und andererseits massebehaftetes Medium zu verstehen ist. Man kann es sich daher durch die Aneinanderreihung von infinitesimal kleinen Feder- und Massesystemen vorstellen, wie die nachfolgende Abbildung veranschaulicht.



Das Kompressionsgesetz beschreibt dabei die Federeigenschaften, das Trägheitsgesetz die Masseeigenschaften des Ausbreitungsmediums. Im eindimensionalen Fall lauten sie wie folgt:

Kompressionsgesetz: $$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

Trägheitsgesetz: $$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Erweitert man diese beiden Gleichungen auf den mehrdimensionalen (dreidimensionalen) Fall, so ergeben sich die beiden Gesetze wie folgt:

Kompressionsgesetz: $\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$, mit x_1, x_2, x_3 als den drei Raumrichtungen und v_{x1}, v_{x2}, v_{x3} als Schallschnellebeiträge in den drei Raumrichtungen. Anders ausgedrückt:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$$

Trägheitsgesetz: $\rho_0 \frac{\partial v_{x_i}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$, mit i = 1,2,3, bzw.

$$\operatorname{grad} p = -\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

(Zur Herleitung siehe: M.Möser, Technische Akustik, 7.Auflage, S.27-33 u. S.42-44)

1.2 Betrachten Sie einen Strahler nullter Ordnung (Monopol) und nennen sie die Gleichung für den Schalldruckverlauf in Abhängigkeit der Zeit und der Entfernung. Der Strahler führe eine harmonische Schwingung durch.

Der Schalldruckverlauf einer Kugelwelle lässt sich beschreiben mithilfe der komplexen Exponentialschwingung, die mit dem Faktor $\frac{1}{r}$ abnimmt:

$p(t,r) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$, mit A als Amplitude der Schwingung.

1.3 Leiten sie aus der Gleichung für den Schalldruck mithilfe des Trägheitsgesetzes die Gleichung für den Verlauf der Schallschnelle einer Kugelwelle her.

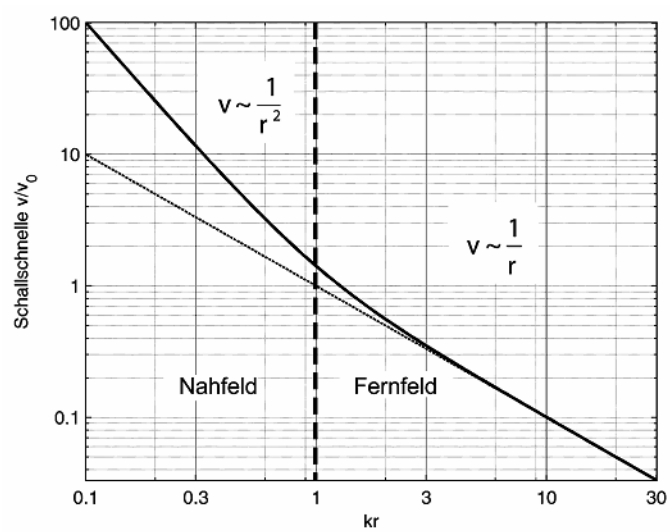
Mithilfe des Trägheitsgesetzes (s. Aufgabenteil 1) lässt sich die Schallschnelle wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{A}{r} e^{j\omega t} e^{-jkr}\right) \\
&= -e^{j\omega t}\left(-\frac{A}{r^2} e^{-jkr} + \frac{A}{r} e^{-jkr} \cdot (-jk)\right) \text{(Produktregel)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{A}{r} e^{j\omega t} e^{-jkr}\left(\frac{1}{\rho_0 r} + \frac{jk}{\rho_0}\right) \\
v &= \int \frac{A}{r} e^{j\omega t} e^{-jkr}\left(\frac{1}{\rho_0 r} + \frac{jk}{\rho_0}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{r} e^{-jkr}\left(\frac{1}{\rho_0 r} + \frac{jk}{\rho_0}\right) \cdot \int e^{j\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{A}{r} e^{-jkr}\left(\frac{1}{\rho_0 r} + \frac{jk}{\rho_0}\right) \cdot \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \\
&= \frac{A}{r} e^{j(\omega t' - kr)}\left(\frac{1}{j\omega\rho_0 r} + \frac{2\pi}{\underbrace{\lambda \cdot f}_{=c} 2\pi \cdot \rho_0}\right) \\
&= \frac{A}{r} e^{j(\omega t' - kr)}\left(\frac{1}{j\omega\rho_0 r} + \frac{1}{\rho_0 c}\right)
\end{aligned}
$$

1.4 Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Betrags der Schallschnelle über der Entfernung zur Schallquelle. Betrachten sie dazu, um welchen Faktor die Schallschnelle in der Nähe der Schallquelle und in großer Entfernung abnimmt. Wählen sie dabei eine doppelt logarithmische Darstellung.

In der Nähe der Schallquelle ($r \to 0$) überwiegt in der Gleichung für die Schallschnelle der erste Term. Die Abnahme der Schallschnelle beträgt hier also $\frac{1}{r^2}$. Der Bereich, in dem das gilt wird als „Nahfeld“ bezeichnet. Mit zunehmender Entfernung von der Schallquelle kehrt sich das Verhältnis jedoch um. In großer Entfernung liefert der erste Term nur noch einen kleinen Beitrag, die Schnelle nimmt nur noch mit $\frac{1}{r}$ ab. Diesen Bereich bezeichnet man als „Fernfeld“. Den Übergang zwischen beiden Bereichen setzt man bei $k \cdot r = 1$ an. Der Übergang zwischen Nahfeld und Fernfeld ist somit Frequenzabhängig.



1.5 Erläutern sie den Nahbesprechungseffekt. Bei welchen Mikrofontypen tritt er auf? Wie macht er sich bemerkbar und wie ist er zu erklären?

Der Nahbesprechungseffekt tritt ausschließlich bei Druckgradienten-empfängern auf und äußert sich in einem Anstieg tiefer Frequenzen, wenn die Schallquelle sich in der Nähe des Mikrofons befindet. Da der Druckgradient proportional zur Schallschnelle ist, werden solche Mikrofone häufig auch als „Schnelleempfänger“ bezeichnet.
Nähert sich eine Quelle dem Mikrofon, so befindet sie sich für tiefe Frequenzen früher im Nahfeld als für hohe Frequenzen. Tiefe Frequenzen steigen dabei also stärker an als hohe.

1.6 Ein Sänger befinde sich zunächst in einem Abstand von 1,50m zum Mikrofon und schließlich in einer Entfernung von 50cm. Auf welche Weise werden sich die Aufnahmen an den beiden Positionen unterscheiden.

Wie in Teilaufgabe 4 ermittelt, befindet sich der Nahfeld-Fernfeld-Übergang bei $k \cdot r = 1$. Die Grenzfrequenz ergibt sich durch:

$$k \cdot r = 1 \;\Rightarrow\; \frac{2\pi}{\lambda} r = \frac{2\pi f}{c} r = 1$$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{2\pi r}$$

In einer Entfernung von 1,50m befindet man sich daher für Frequenzen unterhalb von $f_{1,50m}$ = 36 Hz im Nahfeld. In einer Entfernung von 0,50m liegt die Grenzfrequenz bei $f_{0,5m}$= 108 Hz. Der Frequenzbereich unterhalb dieser Frequenz wird in der Entfernung von 50cm angehoben.

2. Schallpegel

Ein näherungsweise kugelförmig abstrahlender Lautsprecher erzeugt in einem Abstand von 1 m einen Schalldruckpegel L_1

2.1 Um wieviel dB verringert sich in der doppelten Entfernung

a. der Schalldruckpegel
b. der Schallintensitätspegel
c. der Schallschnellepegel bei einer Frequenz von 100 Hz

a. Schalldruckabnahme
Berechnung des Schalldrucks einer Kugelquelle:

$$p(r,t) = \frac{A_0}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

Änderung des Schalldruckpegels:
Wir betrachten $p(r_0)$ und $p(2 \cdot r_0)$ und berechnen den relativen Pegel:

$$\Delta L_p = 10 \cdot \log_{10} \left| \frac{p(2 \cdot r_0)}{p(r_0)} \right|^2 = 10 \cdot \lg \left| \frac{\frac{A_0}{2r_0} e^{j(\omega t - k2r_0)}}{\frac{A_0}{r_0} e^{j(\omega t - kr_0)}} \right| = 10 \cdot \lg \left| \frac{1}{2} e^{-jkr_0} \right|^2 = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -6{,}02 dB$$

b. Schallintensitätsabnahme
Berechnung der Intensität einer Kugelquelle:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Änderung des Schallintensitätspegels

$$\Delta L_I = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I(2 \cdot r_0)}{I(r_0)} \right) = 10 \cdot \lg \left(\frac{\frac{P}{4\pi (2r_0)^2}}{\frac{P}{4\pi r_0^2}} \right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{1}{4}\right) = -6{,}02 dB$$

c. Abnahme der Schallschnelle (f_0=100Hz)
Berechnung der Schallschnelle einer Kugelquelle:

$$v(r,t)=\frac{A_0}{r}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r}\right)e^{j(\omega t-kr)}$$

Änderung des Schnellepegels:

$$\Delta L_v=10\lg\left|\frac{v(2r_0)}{v(r_0)}\right|^2=10\lg\left|\frac{\frac{A_0}{2r_0}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho 2r_0}\right)e^{j(\omega t-k2r_0)}}{\frac{A_0}{r_0}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r_0}\right)e^{j(\omega t-kr_0)}}\right|^2$$

$$=10\lg\left|\frac{1}{2}e^{-jkr_0}\right|^2+10\lg\left|\frac{\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho 2r_0}\right)}{\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r_0}\right)}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{j\omega r_0+\frac{1}{2}c}{j\omega r_0+c}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\left(j\omega r_0+\frac{1}{2}c\right)(c-j\omega r_0)}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{j\omega c r_0+\frac{1}{2}c^2+\omega^2 r_0^2-\frac{1}{2}j\omega c r_0}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\frac{1}{2}c^2+\omega^2 r_0^2+\frac{1}{2}j\omega c r_0}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2,c=343\frac{m}{s},\omega=2\pi f_0=2\pi 100Hz,r_0=1m$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\frac{1}{2}(343\frac{m}{s})^2+4\pi^2\cdot 100^2\frac{m^2}{s^2}+j\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 100\frac{1}{s}\cdot 343\frac{m}{s}\cdot 1m}{4\pi^2\cdot 100^2\frac{m^2}{s^2}+(343\frac{m}{s})^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|0{,}8852+j\cdot 0{,}2103\right|^2$$
$$=-6{,}02dB-0{,}82dB$$
$$=-6{,}84dB$$

Anmerkung: Die Abnahme von 6,84 dB gilt nicht generell für die Abnahme des Schallschnellepegels, sondern lediglich für diese Bedingungen.

2.2 Berechnen Sie für L_1 = 90 dB und f = 100 Hz den Schalldruck, die Schallschnelle und die Schallintensität in 1 m und 2 m Entfernung und recherchieren Sie die dafür notwendigen Materialkonstanten.

Schalldruck:

Der absolute Schalldruckpegel errechnet sich nach

$L = 20\lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$, mit $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa

Dadurch ergeben sich folgende Werte für den Schalldruck in 1m und 2m Entfernung:

1m: $p_1 = p_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{20}} = 2 \cdot 10^{-5} Pa \cdot 10^{\frac{90}{20}} = 0{,}632 Pa$

2m: $p_1 = p_0 \cdot 10^{\frac{L_1 - 6{,}02}{20}} = 2 \cdot 10^{-5} Pa \cdot 10^{\frac{83{,}98}{20}} = 0{,}316 Pa$

Schallschnelle:

Die Formel für die Schallschnelle lautete:

$v(r,t) = \frac{A_0}{r}\left(\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega\rho r}\right)e^{j(\omega t - kr)}$.

Dabei sind:

A_0 = r·p

ρ_{Luft} = 1,189 kg/m^3

c_{Luft} = 343 m/s

Dadurch ergeben sich für den Betrag der Schallschnelle in 1m und 2m Entfernung folgende Werte:

1m:

$$v_1 = \left|\frac{0{,}632\frac{kg}{s^2}}{1m}\left(\frac{1}{1{,}189\frac{kg}{m^3}\cdot 343\frac{m}{s}} + \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot 100\frac{1}{s}\cdot 1{,}189\frac{kg}{m^3}\cdot 1m}\right)\right|$$

$$= \left|0{,}632\frac{kg}{s^2 m}\left(\frac{1}{407{,}83\frac{kg}{m^2 s}} - j\frac{1}{747{,}07\frac{kg}{m^2 s}}\right)\right|$$

$$= 0{,}632\frac{kg}{s^2 m}\cdot 2{,}79 \cdot 10^{-3}\frac{m^2 s}{kg}$$

$$= 0{,}00176\frac{m}{s}$$

2m: $v_2 = 10^{-\frac{6{,}8}{20}} \cdot 0{,}00176\frac{m}{s} = 8{,}045 \cdot 10^{-4}\frac{m}{s}$

Schallintensität:
I = p·v

1m: $I_1 = p_1 \cdot v_1 = 0{,}632 Pa \cdot 0{,}00176 \frac{m}{s} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$

2m: $I_1 = p_1 \cdot v_1 = 0{,}316 Pa \cdot 8{,}04 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$

2.3 Eine Geige erzeuge am Hörerort x den Schalldruckpegel L.

Um wieviel dB ändert sich am Hörerort der Schalldruckpegel, wenn die „Orchesterbesetzung“ von einer Geige auf zwei Geigen (in gleicher Entfernung vom Hörer) erhöht wird ? (Hinweis: Handelt es sich um kohärente oder inkohärente Schallquellen? Wie addieren sich die physikalischen Schallgrößen ?)

Die Signale der beiden Geigen sind inkohärent. Bei inkohärente Schallquellen Addieren sich deren Leistungen und nicht die zugrunde liegenden Feldgrößen.

Demnach ergibt sich der Gesamtpegel zweier Schallquellen mit gleichem Schalldruck p_1 wie folgt:

$$L_{ges} = 10 \cdot \lg\left(\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right) = 10 \cdot \lg\left(2 \cdot \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right)$$

$$= \underbrace{10 \cdot \lg\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2}_{\text{Schalldruckpegel einer einzelnen Geige}} + \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{\text{Pegelzunahme}}$$

Die Pegelzunahme bei Verdopplung der Besetzung beträgt 10·lg(2) = 3,01 dB.

Aus der Psychoakustik ist bekannt, daß für eine subjektive Verdopplung der Lautheit eine Zunahme des Schalldruckpegels von 10 dB notwendig ist. Wieviel Geigen sind hierfür notwendig ?

$$\Delta L = 10dB = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_{\text{mehrere Geigen}}}{P_{\text{eine Geige}}}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\text{mehrere Geigen}} = 10^{\frac{10}{10}} \cdot P_{\text{eine Geige}} = 10 \cdot P_{\text{eine Geige}}$$

Für eine Zunahme des Schalldruckpegels ist die 10-fache Leistung notwendig. Es werden demnach 10 Geigen benötigt um subjektiv die doppelte Lautstärke zu empfinden.