Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 5. Aufgabenblatt

1. Richtcharakteristik von Mikrofonen

Die Gleichung für die ideale Richtcharakteristik von Mikrofonen lautet

$s(\theta) = A + B \cos\theta$

$s(\theta)$: Übertragungsfaktor
A: Druckanteil
B: Gradientenanteil
mit $A+B = 1$

1.1 Berechnen und plotten Sie die idealen Richtcharakteristiken „Kugel“, „Niere“ und „Superniere“ in Matlab.

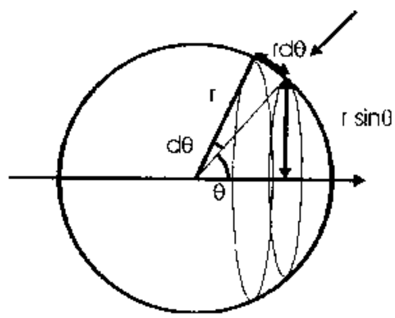
Siehe Matlab-File „polardiagramm3d“.

1.2 Als <u>Bündelungsgrad γ</u> bezeichnet man das Verhältnis der von einem idealen Kugelmikrofon aufgenommenen Leistung zu der von einem gerichteten Mikrofon mit gleichem Übertragungsfaktor aufgenommenen Leistung.

Als <u>relativer Abstandsfaktor</u> (Distance Faktor DSF) bezeichnet man das Verhältnis des Abstandes, in dem ein gerichtetes Mikrofon weiter von einer Schallquelle im Raum positioniert werden kann als ein ideales Kugelmikrofon bei gleichem aufgenommenen Direkt-Diffus-Verhältnis.

Leiten Sie in Abhängigkeit der Größen A und B einen Ausdruck für den Bündelungsgrad des Mikrofons her.

Hinweis:
Das durch die Winkeländerung $d\theta$ gegebene Flächenelement auf einem Kreis mit dem Radius r hat die Fläche
$dA = r\, d\theta\, 2\pi\, r \sin\theta$



Mathematisch lässt sich der Bündelungsgrad also wie folgt ausdrücken:

$$\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}}$$

Allgemein gilt für die Schallleistung vor dem Mikrofon:

$$\begin{aligned} P &= \int_S I dS \\ &= \int_S \frac{p^2}{\rho c} dS \end{aligned}$$

Die vom Mikrofon *aufgenommene* Schalleistung entspricht dieser jedoch nicht, sondern wird zusätzlich von der Richtcharakteristik des Mikrofons beeinflusst:

$$P = \int_S \frac{\left(p \cdot s(\theta)\right)^2}{\rho c} dS$$

Dabei gibt s(θ) winkelabhängig und dimensionslos die Richtcharakteristik des Mikrofons an. Der einfallende Schalldruck wird um den Wert von s(θ) vermindert.

Die Gleichungen der idealen Richtcharakteristiken ergeben sich zu:

$$s(\theta) = A + B \cos(\theta).$$

Die Werte für A und B bestimmen die Richtcharakteristik, A und B summieren sich immer zu 1, sodass s(0°) = 1 für alle Charakteristiken gilt.

Im Falle einer Kugelcharakteristik gilt A = 1 und B = 0. Damit ist die vom Mikrofon aufgenommene Schallleistung gleich der vor dem Mikrofon vorhandenen Schallleistung. Im Falle einer Kugeloberfläche ergibt sich also:

$$\begin{aligned} P_{Kugel} &= \int_S \frac{\left(p \cdot \left(A + B\cos(\theta)\right)\right)^2}{\rho c} dS \\ &= \frac{(p \cdot 1)^2}{\rho c} \cdot \int_S dS \\ &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Für eine beliebige Richtcharakteristik gilt:

$$\begin{aligned} P_{Richt} &= \int_S \frac{\left(p \cdot s(\theta)\right)^2}{\rho c} dS \\ &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_S s^2(\theta) dS \end{aligned}$$

Es ist also das Integral über die Oberfläche der Richtcharakteristik zu berechen. Da die Richtcharakteristik rotationssymmetrisch zur 0°-Richtung ist, ist dies am einfachsten zu lösen, wenn man infinitesimal kleine Kugelschichten betrachtet (siehe Abbildung der Aufgabenstellung).

Herleitung des infinitesimal kleinen Flächenelements dS:
Die Oberfläche einer solchen Kugelscheibe ergibt sich durch den Umfang der Scheibe multipliziert mit deren Breite. Der Umfang wiederum ergibt sich durch den jeweiligen Radius multipliziert mit 2π: $U = 2\pi \cdot r' = 2\pi \cdot r \sin(\theta)$.
Die Breite ergibt sich durch Überlegungen zu den Verhältnissen des Kreises. In einem Kreis verhalten sich stets die Längen der Kreisabschnitte wie die zugehörigen Winkel. In unserem Fall also:
$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{x}{2\pi r}$, dabei ist x die Breite der Scheibe.
Löst man die Gleichung nach x auf ergibt sich:
$x = r \cdot d\theta$
Die Oberfläche der Kreisscheibe ergibt sich also durch $dS = r \cdot d\theta \cdot 2\pi \cdot r \sin(\theta)$

Die Leistung berechnet sich schließlich nach:

$$
\begin{aligned}
P_{Richt} &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot 2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi (A + B\cos(\theta))^2 \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(A^2 \int_0^\pi \sin(\theta) \mathrm{d}\theta + 2AB \int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta) \mathrm{d}\theta + B^2 \int_0^\pi \cos^2(\theta)\sin(\theta) \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(A^2 \left[-\cos^2(\theta)\right]_0^\pi + 2AB \left[\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\right]_0^\pi + B^2 \left[-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right]_0^\pi \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + 0 + \frac{2}{3} B^2 \right) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + \frac{2}{3} B^2 \right)
\end{aligned}
$$

Der Bündelungsgrad ergibt sich demnach zu:

$$\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}}$$

$$= \frac{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2}{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \left(2A^2 + \frac{2}{3} B^2 \right)}$$

$$= \frac{1}{A^2 + \frac{1}{3} B^2}$$

1.3 Leiten Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Bündelungsgrad γ und dem Distance Faktor ab und berechnen Sie den relativen Abstandsfaktor DSF für drei gängige Richtcharakteristiken (Breite Niere, Niere, Superniere) aus den Ergebnissen von 3. und einem idealisierten Verlauf von Direkt- und Diffusfeld im Raum.

Am gleichen Punkt im Raum hat ein gerichtetes Mikrofon ein größeres Direkt-Diffusschall-Verhältnis als ein ungerichtetes Mikrofon. Mit anderen Worten: ein gerichtetes Mikrofon nimmt am gleichen Punkt im Raum weniger Diffusschall auf als ein ungerichtetes Mikrofon. Um das gleiche Direkt-Diffusschall-Verhältnis zu erhalten muss man sich also mit dem gerichteten Mikrofon weiter von der Schallquelle entfernen, weil dort das Verhältnis von Diffus- zu Direktschall des Raumes kleiner ist.

Im Raum überlagert sich an jedem Punkt das Direktschallfeld einer Schallquelle mit dem Diffusschallfeld. Der Schalldruck des Diffusschallfelds ist dabei im gesamten Raum konstant, während der Schalldruck des Direktfeldes mit 1/r abnimmt. Somit nimmt auch das Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall mit 1/r ab:

$$\frac{Direktschall}{Diffusschall} \propto \frac{1}{r}$$

Das von einem Mikrofon aufgenommene Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall lässt sich ausdrücken durch das Verhältnis aus dem Übertragungsfaktor in 0°-Richtung -also dem, was von vorne aufgenommen wird- zu dem was von allen anderen Seiten aufgenommen wird, also der Mittelung des Übertragungsfaktors über alle Raumrichtungen: $\frac{M_0(0°)}{M_{diffus}}$, mit $M_{diffus} = M_0(0°) \cdot \int_S (A + B\cos(\theta))d\theta$

Im Falle einer Kugelcharakteristik gilt also: $\frac{M_{0,ungerichtet}(0°)}{M_{diffus,ungerichtet}} = 1$

Um also das gleiche Verhältnis von Direkt- und Diffusschall zu erhalten, wie es ein ungerichtetes Mikrofon aufweist, ist es notwendig, das Direktschall-Diffusschall-Verhältnis des gerichteten Mikrofons um einen Faktor zu verringern.

$$\frac{M_{0,ungerichtet}(0°)}{M_{0,ungerichtet,diffus}} = c \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}}$$

$$1 = c \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}}$$

Da der Diffusschall im Raum und daher auch die Aufnahme durch das Mikrofon konstant ist, kann dies nur dadurch erreich werden, dass die Aufnahme des Direktschalls verringert wird. Dies wiederum ist dann der Fall, wenn das Mikrofon weiter entfernt von der Schallquelle steht und dadurch entsprechend weniger Direktschall aufnimmt. Geht man davon aus, dass das Kugelmikrofon einen Abstand von 1 aufweist, und der Schalldruck mit 1/r abnimmt, ist dies erreicht bei $c = \frac{1}{DSF}$.

Es ergibt sich mit $\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}} = \left(\frac{M_0(0°)}{M_{diffus}}\right)^2$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{DSF} \cdot \frac{M_{0,gerichtet}(0°)}{M_{0,gerichtet,diffus}} \\ &= \frac{1}{DSF} \cdot \sqrt{\gamma} \\ \Rightarrow DSF &= \sqrt{\gamma} \end{aligned}$$

Die Abstandsfaktoren für die Breite Niere (A=0.667, B=0.333), Niere (A=0.5, B=0.5) und die Superniere (A=0.366, B =0.634) ergeben sich also zu:

$$DSF_{\text{Breite Niere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Breite Niere}}} = \sqrt{\left(A^2 + \frac{1}{3}B^2\right)^{-1}} = \sqrt{\left(0.667^2 + \frac{1}{3}0.333^2\right)^{-1}} = 1{,}44$$

$$DSF_{\text{Niere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Niere}}} = \sqrt{\left(0.5^2 + \frac{1}{3}0.5^2\right)^{-1}} = 1{,}73$$

$$DSF_{\text{Superniere}} = \sqrt{\gamma_{\text{Superniere}}} = \sqrt{\left(0.366^2 + \frac{1}{3}0.634^2\right)^{-1}} = 1{,}93$$

2. Mikrofone

2.1 Wodurch unterscheidet sich ein freifeldentzerrter von einem diffusfeldentzerrten Druckempfänger? Skizzieren Sie die resultierenden Frequenzgänge dieser beiden Mikrofontypen im **Freifeld**.

Der sog. Druckstaueffekt entsteht bei der Reflexion einer Schallwelle an der Mikrofonmembran. Durch die Reflexion überlagern sich hin- und rücklaufende Welle unmittelbar vor der Membran und es entsteht ein erhöhter Druck. Dies macht sich besonders bemerkbar im Freifeld, da hier der Schall im wesentlichen von vorne auf die Membran auftrifft. Dazu wirkt sich der Druckstau lediglich im hohen Frequenzbereich aus, da die Mikrofonmembran für diese diesen Frequenzbereich ein Hindernis darstellt. Tiefe Frequenzen werden um die Membran herumgebeugt. Ein Druckempfänger ohne weitere Entzerrungsmaßnahme ist somit ein sog. diffusfeldentzerrter Druckempfänger, da er nur im diffusen Schallfeld einen annähernd konstanten Frequenzgang aufweist. Setzt man einen diffusfeldentzerrten Druckempfänger im Freifeld ein, so tritt eine Überhöhung der hohen Frequenzen um bis zu 6 dB auf.
Freifeldentzerrte Druckempfänger gleichen diese Überhöhung aus, klingen dementsprechend im Diffusfeld dumpfer.
Die nachfolgende Abbildung zeigt den Frequenzgang eines diffusfeldentzerrten Mikrofons:

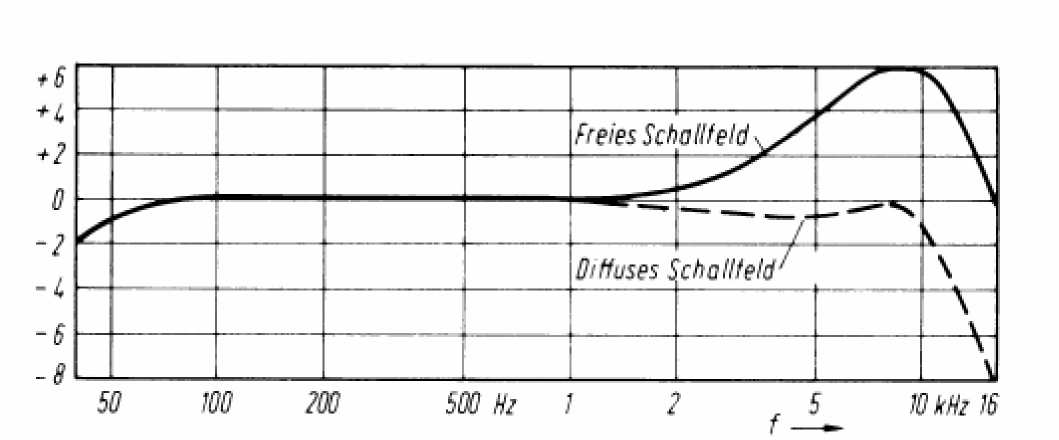
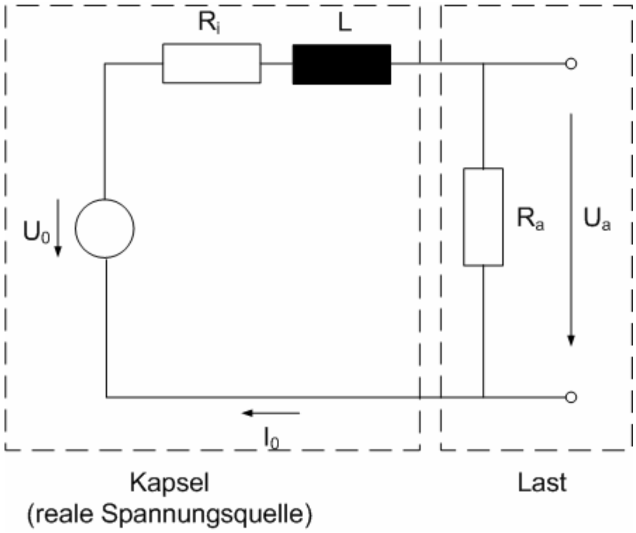


Abbildung 1: Frequenzgang eines diffusfeldentzerrten Druckempfängers

2.2 Gegeben seien das elektrische Ersatzschaltbild des elektrodynamischen Mikrofons und dessen elektromechanische Wandlergleichung (Gl. 3.1). Dieser zufolge ist die Ausgangsspannung direkt von der Membranschnelle abhängig:



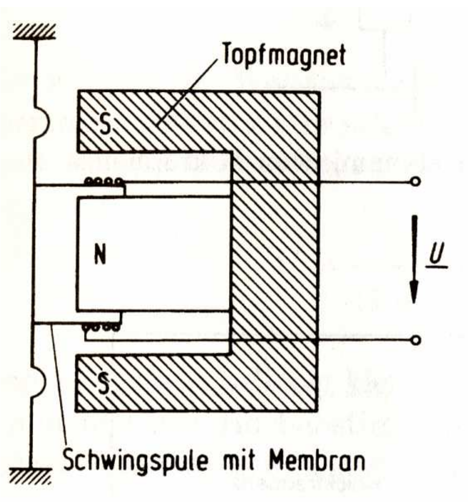
$$U_0 = B \cdot I \cdot v \qquad \text{(Gl. 2.1)}$$

U_0 = Induktionsspannung
U_a = Ausgangsspannung
R_a = Abschlusswiderstand
R_i = ohmscher Innenwiderstand der Schwingspule
L_i = Induktivität der Schwingspule

Leiten Sie anhand des frequenzabhängigen Verhaltens der elektrischen und mechanischen Baugruppen den Frequenzgang des Übertragungsfaktor $G_{up}=U_a/p$ des Mikrofons her.

Der Frequenzgang des Mikrofons wird durch zwei Komponenten bestimmt:
1. durch das mechanische Verhalten der Mikrofonkapsel und
2. durch den elektrischen Aufbau des Übertragungssystems

Der mechanische Aufbau eines dynamischen Mikrofons wird im folgenden Bild veranschaulicht:



Der elektrische Aufbau des Übertragungssystems ist der Aufgabenstellung zu entnehmen.

Gleichung 2.1 verbindet diese beiden Teile, indem sie angibt wie die (mechanische) Geschwindigkeit *v* in (elektrische) Spannung umgesetzt wird. Im Folgenden betrachten wie den mechanischen und den elektrischen Teil zunächst getrennt voneinander und fügen beide später zu einer Gleichung zusammen

1. Mechanischer Aufbau

Der Schalldruck, der auf die Membran wirkt, hat eine Kraft auf die Membranfläche zur Folge:

$$p = \frac{F}{S}$$

Die aufgehängte Membran lässt sich als Feder-Masse-System auffassen. Für sie gilt die Schwingungsgleichung:

$$F = m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + D \cdot x \qquad (1)$$

Zur Erläuterung: Die insgesamt auf die Membran wirkende Kraft setzt sich zusammen aus drei Kräften:

1. der Kraft F, die von außen auf die Membran einwirkt. Diese hat in unserem Falle ihre Ursache im Schalldruck.

2. der Federkraft der Membran, die der Auslenkung entgegen wirkt.
   $F_D = D \cdot x$
   D – Federkonstante
   x – Auslenkung aus der Ruhelage

3. der Reibungskraft, die in unserem Fall der Luftreibung entspricht. Sie sorgt dafür, dass die Membran nicht ungedämpft schwingt, sondern nach einiger Zeit in ihre Ruhelage zurückkehrt.
   $F_r = r \cdot v$
   r – Reibungskoeffizient
   v – Geschwindigkeit der Membran

Die resultierende Kraft, die zu einer beschleunigten Bewegung der Membran führt, lässt sich also wie folgt ausdrücken (die Vorzeichen berücksichtigen die Richtung der Kräfte):

$$F_{gesamt} = F - F_D - F_r$$
$$m \cdot \ddot{x} = F - D \cdot x - r \cdot \dot{x}$$
$$\Rightarrow F = m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + D \cdot x$$

Um einen Zusammenhang zwischen den mechanischen und den elektrischen Eigenschaften des Mikrofons herzustellen, ist später notwendig, die Geschwindigkeit in Gleichung 2.1 durch die Geschwindigkeit zu ersetzen, die der mechanische Aufbau hervorruft. Daher drücken wir Gleichung (1) mithilfe der Geschwindigkeit aus und erhalten so einen Ausdruck für die durch den Schalldruck erzeugte Geschwindigkeit der Membran.

Geht man davon aus, dass die Membran harmonisch schwingt, dann lässt sich die Auslenkung x beschreiben durch:

$$x = \hat{x}e^{j\omega t}$$

und es ergeben sich Geschwindigkeit v und Beschleunigung a als Ableitung von x nach der Zeit:

$$v = \dot{x} = j\omega \cdot \hat{x}e^{j\omega t} = j\omega \cdot x$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 \cdot \hat{x}e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot x$$

Eingesetzt in die Gleichung für F ergibt sich:

$$\begin{aligned} F &= -m\omega^2 x + r \cdot j\omega x + D \cdot x \\ &= \underbrace{j\omega x}_{v} \cdot \left(j\omega m + r + \frac{D}{j\omega} \right) \\ &= v \cdot \left(j\omega m + r + \frac{D}{j\omega} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = \frac{F}{j\omega m + r + \frac{D}{j\omega}} = \frac{pS}{j\omega m + r + \frac{D}{j\omega}} \qquad (2)$$

2. Elektrischer Aufbau

Der elektrische Aufbau lässt sich nach dem Ersatzschaltbild der Abbildung und dem Ohmschen Gesetz folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{U_a}{U_0} = \frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i}$$

$$\Rightarrow U_a = U_0 \frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i} \qquad (3)$$

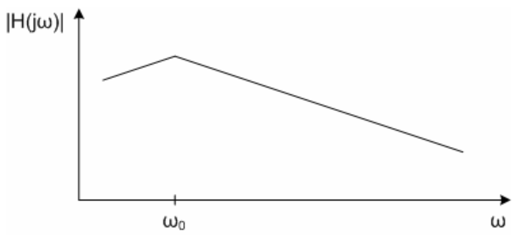
Durch Verknüpfen der mechanischen (2) und elektrischen (3) Anteile, ergibt sich der Übertragungsfaktor, also der Zusammenhang von einfallendem Schalldruck zur Ausgangsspannung zu:

$$\begin{aligned} U_a &= U_0 \frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i} && \text{Gl. 2.1 einsetzen} \\ &= Blv \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i} && \text{Gl. (2) einsetzen} \\ &= Bl \frac{pS}{j\omega m + r + \frac{D}{j\omega}} \cdot \frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i} \end{aligned}$$

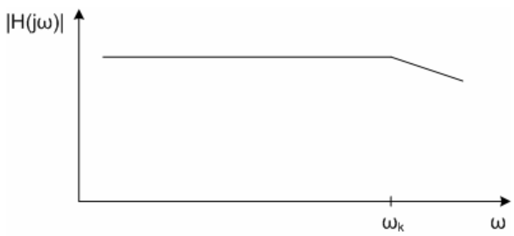
$$G_{up} = \frac{U_a}{p} = \underbrace{BlS \cdot \frac{1}{j\omega m + r + \frac{D}{j\omega}}}_{mechanischer Aufbau} \cdot \underbrace{\frac{R_a}{R_a + R_i + j\omega L_i}}_{elektrisches Übertragungssystem}$$

2.3 Leiten Sie aus der Formel für G_{up} asymptotisch den Frequenzgang des Übertragungsfaktors ab (Skizze). Kennzeichnen Sie die charakteristische Frequenzen und das Anstiegsverhalten des Betragsfrequenzgangs in [db/oct].

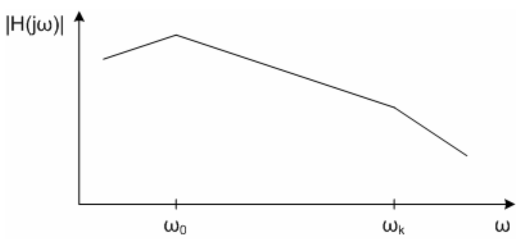
Der Frequenzgang, der sich durch den mechanischen Aufbau ergibt gleicht dem eines Feder-Masse-Systems: Bis zur Resonanzfrequenz steigt er mit ω an, nimmt also mit 6 dB pro Oktave zu, oberhalb der Resonanzfrequenz nimmt er mit 6 dB pro Oktave ab. Dies lässt sich auch aus der Gleichung ablesen: Für sehr kleine Frequenzen ω überwiegt die Gleichung der Term $\frac{1}{D/j\omega} = \frac{j\omega}{D}$, der Frequenzgang steigt also mit der Frequenz an. Für sehr große Frequenzen ω hingegen ist dieser Term zu vernachlässigen und es überwiegt der Term $\frac{1}{j\omega m}$, der Frequenzgang sinkt also mit der Frequenz ab. Der Verlauf ergibt sich wie folgt:



Das elektrische Übertragungssystem hingegen hat Tiefpasscharakter, der Frequenzgang sinkt oberhalb einer Knickfrequenz ω_k mit 6 dB pro Oktave.
Es mag zunächst verwundern, dass man es hierbei mit einem Tiefpass zu tun hat, denn betrachtet man das Ersatzschaltbild (s.o.), dann würde man darauf schließen, dass man es mir einem Hochpass zu tun hat. Für den Strom jedoch, der sich reziprok zur Spannung verhält, stellt das Schaltbild einen Tiefpass dar. Dies lässt sich auch aus Gleichung (1) ersehen: wächst die Frequenz ω an, dann wächst auch der Nenner. Wenn der Nenner aber größer wird, dann sinkt die Stromstärke.



Der resultierende Frequenzgang sieht demnach wie folgt aus:



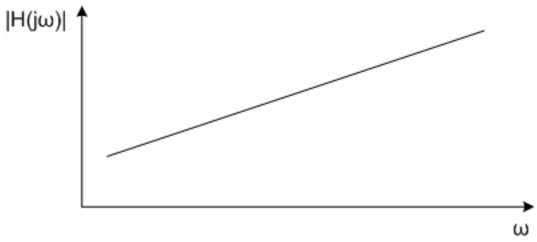
Unterhalb der Resonanzfrequenz ergibt sich ein Anstieg um 6 dB/Oktave, zwischen Resonanzfrequenz und Knickfrequenz sinkt der Frequenzgang um 6 dB/Oktave, oberhalb der Knickfrequenz mit 12 dB/Oktave.

3.4 Wie unterscheidet sich der Übertragungsfaktor des elektrodynamischen Lautsprechers von dem des elektrodynamischen Mikrofons und warum?

Im Falle eines elektrodynamischen Lautsprechers wird das Verhältnis von abgegebenem Schalldruck zur angelegten Spannung betrachtet. In diesem Fall müssen zusätzlich noch die Abstrahlungseigenschaften des Lautsprechers berücksichtigt werden, die zu einem bestimmten Schalldruck an einem Punkt im Raum führen.
Da der Lautsprecher in der Akustik als Volumenquelle behandelt wird, ergibt sich der Schalldruck an einem Punkt im Raum zu

$$p = j\omega\rho v \pi b^2 \ .$$

Für den insgesamt resultierenden Frequenzgang ergibt sich somit noch ein weiterer Teilfrequenzgang, der mit 6 dB/Oktave ansteigt:



Insgesamt ergibt sich dadurch der Frequenzgang des Lautsprechers wie folgt: