Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 6. Aufgabenblatt

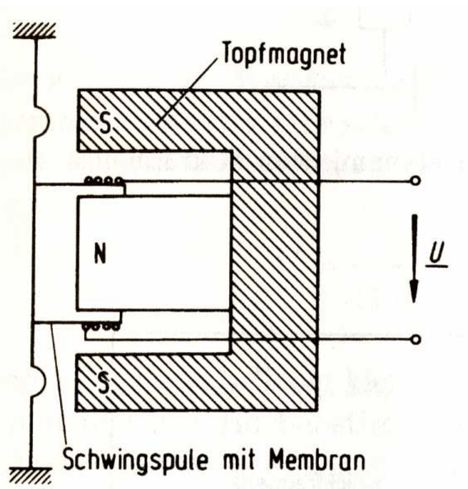
1. Lautsprecher

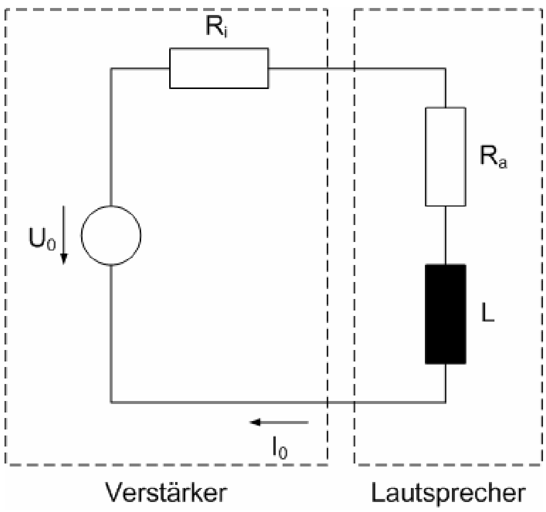
1.1 Leiten Sie aus den Grundgleichungen für das mechanische Verhalten der Membran und den elektrischen Antrieb einen Ausdruck für den Frequenzgang des Übertragungsfaktors eines elektrodynamischen Lautsprechers bei tiefen Frequenzen her.

Durch welche Größen ist der Übertragungsbereich nach unten und nach oben beschränkt? Wie lassen sich diese konstruktiv beeinflussen?

Der Frequenzgang des Lautsprechers wird durch drei verschiedene Komponenten bestimmt:
1. durch den elektrischen Aufbau des Übertragungssystems
2. durch das mechanische Verhalten des Lautsprechers und
3. durch seine Abstrahleigenschaften

Mechanischer und elektrischer Aufbau sind durch die beiden folgenden Bilder illustriert:





Dabei erzeugt die Wechselspannung, die der Verstärker liefert, und die dem Signalverlauf folgt, einen Wechselstrom. Dieser Wechselstrom ist verantwortlich für die Auslenkung der Schwingspule des Lautsprechers und demnach für die Geschwindigkeit, mit der sich die Lautsprechermembran bewegt. Die Geschwindigkeit der Membran wiederum wird direkt übertragen auf die Luftteilchen, die sich vor der Membran befinden, und ruft damit eine Bewegung der Teilchen hervor. Die Schallschnelle der Teilchen ist damit gleich der Geschwindigkeit, mit der sich die Membran bewegt und es entsteht ein Schallwechseldruck.

1. Zusammenhänge des elektrischen Übertragungssystems

Für das oben abgebildete Übertragungssystem gilt nach dem Ohm'schen Gesetz:

$$I = \frac{U}{R_i + R_a + j\omega L} \tag{1}$$

2. Mechanischer Aufbau

Das Mechanische Verhalten der Membran lässt sich beschreiben durch die Kräfte, die auf die Membran wirken.

2.1 Lorentzkraft:

Durch das Anlegen einer (Wechsel-)Spannung an die Schwingspule des Lautsprechers, die sich im Magnetfeld des Topfmagneten befindet, fließt durch diese ein Strom. Dieser Strom hat eine Kraftwirkung auf die Spule und damit auf die Membran zur Folge. Diese lässt sich wie folgt berechnen:

$$F_L = B \cdot l \cdot I \tag{2}$$

B – magnetische Flussdichte
l – Länge des Leiters
I – Stromstärke

2.2 Federkraft

Während die Lorentzkraft dafür sorgt, dass die Membran aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird, gibt es noch Kräfte, die dieser Auslenkung entgegenwirken. Dies ist zum einen die Federkraft der Membran, die sich durch die Gleichung:

$$F_D = D \cdot x \tag{3}$$

D – Federkonstante
x – Auslenkung aus der Ruhelage
beschreiben lässt.

Die Resonanzfrequenz der Membran lässt sich dabei errechnen durch $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

m – Masse der Membran (inkl. Spule).

2.3 Reibungskraft

Ohne eine Reibungskraft würde ein Feder-Masse-System ungedämpft schwingen, eine einmal angestoßene Feder würde sich also ewig auf- und abbewegen. In unserem Fall ist die Reibung im wesentlichen durch die Luft bestimmt und berechnet sich wie folgt:

$$F_r = r \cdot v \tag{4}$$

r – Reibungskoeffizient
v – Geschwindigkeit der Membran

Die resultierende Kraft auf die Membran lässt sich also beschreiben durch:

$$F = F_L - F_D - F_r\,, \tag{5}$$

bzw. mit (1), (2) und (3) durch:

$$m \cdot a = B \cdot l \cdot I - D \cdot x - r \cdot v \tag{6}$$

Geht man davon aus, dass die Membran harmonisch schwingt, dann lässt sich die Auslenkung x beschreiben durch:

$$x = \hat{x}e^{j\omega t} \qquad (7)$$

und es ergeben sich Geschwindigkeit v und Beschleunigung a als Ableitung von x nach der Zeit:

$$v = \dot{x} = j\omega \cdot \hat{x}e^{j\omega t} = j\omega \cdot x \qquad (8)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 \cdot \hat{x}e^{j\omega t} = -\omega^2 \cdot x \qquad (9)$$

Wir erhalten also in Gleichung (5):

$$-m\omega^2 \cdot x = B \cdot l \cdot I - D \cdot x - j\omega r \cdot x$$

$$-\omega^2 m \cdot x + D \cdot x + j\omega r \cdot x = B \cdot l \cdot I$$

$$x = \frac{B \cdot l \cdot I}{D - \omega^2 m + j\omega r}$$

und mit (7) ergibt sich

$$v = \frac{j\omega \cdot B \cdot l \cdot I}{D - \omega^2 m + j\omega r} = \frac{B \cdot l \cdot I}{\frac{D}{j\omega} + j\omega m + r} \qquad (10)$$

3. Abstrahleigenschaften

Der Lautsprecher wird in der Akustik als Volumenquelle aufgefasst. Für diese berechnet sich der Schalldruck nach:

$$p = \frac{j\omega\rho v S}{4\pi r} e^{-jkr} \qquad (11)$$

ρ – Dichte der Luft

S – Strahlerfläche

r – Radius / Abstand zur Quelle (nicht zu verwechseln mit dem Reibungskoeffizient !)

k – Wellenzahl

(Herleitung siehe M. Möser „Technische Akustik“, 6. Auflage, S.58ff)

Als Strahlerfläche nehmen wir in unserem Falle nicht die Fläche einer konusförmigen Membran an, sondern wir betrachten vereinfachend eine kreisrunde Membran mit Radius b, also:

$$S = \pi b^2$$

Da wir in unserem Fall keine Ortsabhängigkeiten betrachten, sondern uns nur den Übertragungsfaktor an einem bestimmten Ort ansehen, vernachlässigen wir die Terme, die von r abhängen. Dies sind in diesem Fall der Phasenterm e^{-jkr} und der Dämpfungsterm $\frac{1}{4\pi r}$. Es ergibt sich:

$$p = j\omega\rho v \pi b^2 \qquad (12)$$

Der Übertragungsfaktor eines Lautsprechers beschreibt das Verhältnis von abgegebenem Schalldruck zu angelegter Spannung. Er besagt also, wieviel Schalldruck der Lautsprecher bei einer bestimmten Spannung abgibt. Der Übertragungsfaktor ist frequenzabhängig und gibt somit Aufschluss darüber, wie der Spannungsverlauf einer bestimmten Frequenz in Schalldruck umgewandelt wird.

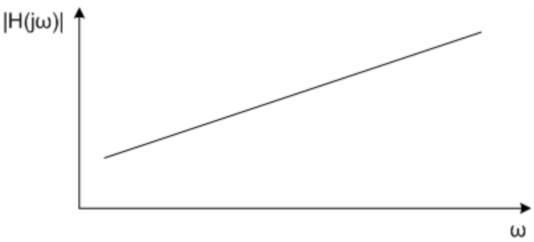
In Gleichungsform und mithilfe der oben angeführten Gleichungen (1), (11) und (12) ergibt sich demnach:

$$p = j\omega\rho\pi b^2 \cdot \frac{B \cdot l}{\frac{D}{j\omega} + j\omega m + r} \cdot \frac{U}{R_i + R_a + j\omega L}$$

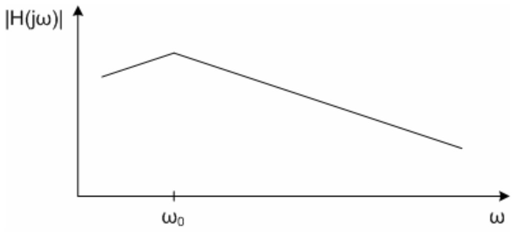
$$\Rightarrow \frac{p}{U} = \underbrace{j\omega\rho\pi b^2}_{\text{Abstrahleigenschaften}} \cdot \underbrace{\frac{B \cdot l}{\frac{D}{j\omega} + j\omega m + r}}_{\text{mechanischer Aufbau}} \cdot \underbrace{\frac{1}{R_i + R_a + j\omega L}}_{\text{elektr.Übertragungssystem}} \qquad (13)$$

Der Frequenzgang des Übertragungsfaktors ergibt sich also (siehe Gleichung (13)) als Überlagerung der Frequenzgänge der einzelnen Komponenten. Wir betrachten also nun qualitativ die Frequenzgänge der einzelnen Komponenten:

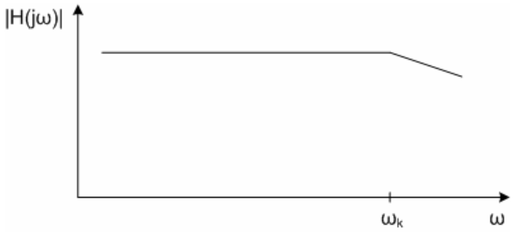
Der Frequenzgang, der sich durch die Abstrahleigenschaften ergibt, nimmt mit ω zu. Er hat also einen Anstieg mit 6 dB pro Oktave. Der Anstieg von 6 dB lässt sich wie folgt erklären: Bei einer festen Schallschnelle bewirkt eine Verdopplung der Frequenz eine Verdopplung des Schalldrucks. Eine Frequenzverdopplung bezeichnet man als Oktave, eine Verdopplung des Schalldrucks bewirkt einen Anstieg um 6 dB.



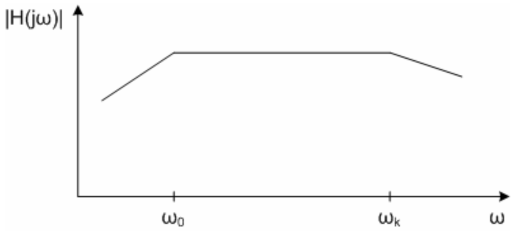
Der Frequenzgang, der sich durch den mechanischen Aufbau ergibt gleicht dem eines Feder-Masse-Systems: Bis zur Resonanzfrequenz steigt er mit ω an, nimmt also mit 6 dB pro Oktave zu, oberhalb der Resonanzfrequenz nimmt er mit 6 dB pro Oktave ab. Dies lässt sich auch aus der Gleichung ablesen: Für sehr kleine Frequenzen ω überwiegt die Gleichung der Term $\frac{1}{D/j\omega} = \frac{j\omega}{D}$, der Frequenzgang steigt also mit der Frequenz an. Für sehr große Frequenzen ω hingegen ist dieser Term zu vernachlässigen und es überwiegt der Term $\frac{1}{j\omega m}$, der Frequenzgang sinkt also mit der Frequenz ab. Der Verlauf ergibt sich wie folgt:



Das elektrische Übertragungssystem schließlich hat Tiefpasscharakter, der Frequenzgang sinkt oberhalb einer Knickfrequenz ω_k mit 6 dB pro Oktave.
Es mag zunächst verwundern, dass man es hierbei mit einem Tiefpass zu tun hat, denn betrachtet man das Ersatzschaltbild (s.o.), dann würde man darauf schließen, dass man es mir einem Hochpass zu tun hat. Für den Strom jedoch, der sich reziprok zur Spannung verhält, stellt das Schaltbild einen Tiefpass dar. Dies lässt sich auch aus Gleichung (1) ersehen: wächst die Frequenz ω an, dann wächst auch der Nenner. Wenn der Nenner aber größer wird, dann sinkt die Stromstärke.



Der resultierende Frequenzgang ergibt sich schließlich aus Überlagerung der drei beschriebenen Frequenzgänge:



Unterhalb der Resonanzfrequenz steigt er mit 12 dB pro Oktave, zwischen der Resonanz- und der Knickfrequenz verläuft er annähernd linear und sinkt schließlich oberhalb der Knickfrequenz mit 6 dB pro Oktave.

1.2 Bei welcher Bauform der Lautsprechermembran treten bevorzugt Partialschwingungen auf ? Durch welche konstruktiven Maßnahmen lassen sich diese verhindern bzw. reduzieren ?

Als Partialschwingungen bezeichnet man die Tatsache, dass eine Lautsprechermembran nicht mehr konphas, also nicht mehr als ganzes mit gleicher Phase schwingt, sondern dass sie in schwingende Teilbereiche mit örtlich unterschiedlichen Phasen zerfällt, die durch Knotenlinien voneinander getrennt sind (Abbildung siehe Skript S. 49). Dieser Effekt tritt besonders bei Einwegsystemen mit Konuslautsprechern bei hohen Frequenzen auf.
Eine Möglichkeit, Partialschwingen zu verringern, besteht also darin, das Antriebssystem zu wechseln. Bei elektrostatischen Lautsprechen, bei denen die antreibende Kraft gleichmäßiger über die gesamte Fläche verteilt wird, treten deutlich weniger Partialschwingungen auf.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Steife der Membran durch Auswahl eines anderen Materials oder einer anderen Form zu erhöhen.

1.3 Warum treten beim elektrostatischen Lautsprecher keine Partialschwingungen auf ? Warum sinkt der Wirkungsgrad von elektrostatischen Lautsprecher bei tiefen Frequenzen ab ?

Der elektrostatische Lautsprecher ist das reziproke Pendant zum Kondensatormikrofon. Auch hier finden wir eine statisch gelagerte, elektrisch vorgespannte Elektrode, vor der wiederum eine freibewegliche Gegenelektrode angeordnet ist. Das Abstrahlverhalten ist prinzipbedingt das eines Dipols also achtförmig. Deshalb ist die Effektivität dieses Wandlers vor allem im tieffrequenten Bereich schlecht (Massekurzschluss). Ein weiterer Grund, sind die baulich begrenzten Membranhübe. Für die Kraftwirkung zweier Elementarladungen Q_1 und Q_2 im Abstand l voneinander gilt das Coulombsche Gesetz:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon d^2} = \frac{C^2 U^2}{4\pi\varepsilon d^2}$$

D.h. die Effektivität des Lautsprechers sinkt quadratisch je weiter sich die Membranen aufgrund ihrer Auslenkungen voneinander entfernen. Der Arbeitspunkt muss durch eine sehr hohe Vorspannung (einige Hundert bis Tausend Volt) aus dem quadratischen Bereich der Kennlinie in einen annähernd linearen Bereich gehoben werden.

Da die Antriebskraft frequenzunabhängig räumlich homogen auf der Membranfläche angreift, wird die Ausbildung von Partialschwingung sehr erschwert.

2. Stereofone Aufnahmeverfahren

2.1 Erläutern Sie die Begriffe „Hauptachsenwinkel“, „Aufnahmewinkel“ und „Akzeptanzwinkel“ eines XY-Stereofonie-Mikrofonsystems.

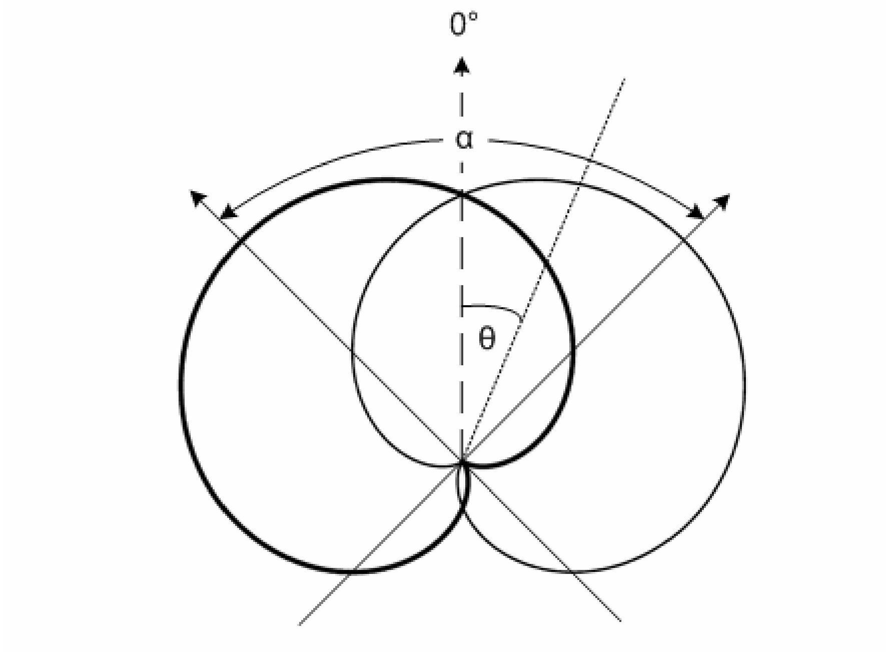
Unter dem „Hauptachsenwinkel“ versteht man den Öffnungswinkel der Mikrofone, also den Winkel, der zwischen den Hauptachsen der beiden Mikrofone entsteht.

Als „Aufnahmewinkel“ bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Schalleinfallsrichtungen, die das Klanggeschehen gerade aus einem der beiden Lautsprecher lokalisieren lassen. Nach DIN 60268 wird ein Schallereignis aus einem der beiden Lautsprecher lokalisiert, wenn die Pegeldifferenz zwischen den Signalen für linken und rechten Kanal zwischen 15 und 18 dB betragen.

Der „Akzeptanzwinkel“ ist der Winkel zwischen den Richtungen, die die größte Pegeldifferenz zwischen linken und rechtem Kanal aufweisen.

2.2 Gegeben sei ein stereofones Aufnahmesystem nach dem XY-Verfahren aus zwei Mikrofonen in Nierencharakteristik mit 90° Öffnungswin kel.

Welche Pegeldifferenz zwischen linkem und rechtem Kanal erzeugt eine Schallquelle aus 45° Einfallsrichtung und aus 90° Einfallsrichtung (sei tlicher Schalleinfall) ?



Die Pegeldifferenz ergibt sich als logarithmisches Maß des Verhältnisses von linken und rechtem Kanal:

$$\Delta L = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

Der Öffnungswinkel α (=Hauptachsenwinkel) beträgt laut Aufgabenstellung 90° (= π/2).
Bei einer Schalleinfallsrichtung von θ = 45° (= π/4) beträgt die Pegeldifferenz zwischen linken und rechtem Kanal demnach:

$$\Delta L_{45^\circ} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5}{1}\right)$$

$$= -6{,}02 dB$$

Und bei einer Schalleinfallsrichtung von 90°:

$$\Delta L_{90^\circ} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{\pi/2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$= 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{0{,}5 + 0{,}5\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= -15{,}3 dB$$

2.3 Wo werden die beiden Schallquellen bei der stereofonen Wiedergabe auf der Lautsprecherbasis abgebildet ?

Folgende Richtwerte gelten für die Auslenkung auf der Stereobasis:

Auslenkung	0%	25%	50%	75%	100%
Pegeldifferenz	0 dB	3 dB	6,5 dB	10 dB	16 dB

Demnach ergibt sich für eine Schalleinfallsrichtung aus 45° (Pegeldifferenz: -6 dB) eine Auslenkung von etwas weniger als 50%, bei 90° (Pegeldifferenz 15,3 dB) eine Lokalisierung bei fast 100%.

2.4 Welchen Hauptachsenwinkel muss man bei einem XY-System mit zwei Nieren einstellen, um einen Aufnahmewinkel von 120° zu erhalten?

Hinweis: Verwenden sie folgende Zusammenhänge:

1. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
2. $a \sin(\omega t) + b\cos(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, mit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

Um den Öffnungswinkel errechnen zu können, ist es notwendig, die Gleichung aus Aufgabe 2.2 nach α umzustellen:

$$\Delta L = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}\right)$$

$$10^{\frac{\Delta L}{20}} = \frac{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}$$

$$10^{\frac{\Delta L}{20}}\left(A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right) = A + B\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right) = A + B\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\theta - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right)$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - A + \underbrace{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)\sin\theta}_{a}\sin\frac{\alpha}{2} + \underbrace{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)\cos\theta}_{b}\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - A + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{A - A \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}}}{\sqrt{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)^2 \sin^2\theta + \left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)^2 \cos^2\theta}}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} - B\right)\cos\theta}{\left(B \cdot 10^{\frac{\Delta L}{20}} + B\right)\sin\theta}\right)$$

Im Falle zweier Nierencharakteristiken sind A und B jeweils = 0,5. Der Aufnahmewinkel soll 120° betragen, demnach soll also bei einem Winkel von θ = 60° (= π/3) eine Pegeldifferenz von ΔL = -16 dB erreicht sein, bzw. bei einem Winkel von θ = -60° (= - π/3) eine Pegeldifferenz von ΔL = 16 dB.

Es ergibt sich nach Einsetzen der Werte ein Öffnungswinkel von:

$$\alpha = 2\cdot\arcsin\left(\frac{0{,}5-0{,}5\cdot 10^{\frac{-16}{20}}}{\sqrt{\left(0{,}5\cdot 10^{\frac{-16}{20}}+0{,}5\right)^2\cos^2\frac{\pi}{3}+\left(0{,}5\cdot 10^{\frac{-16}{20}}+0{,}5\right)^2\sin^2\frac{\pi}{3}}}\right)-2\cdot\frac{\left(0{,}5\cdot 10^{\frac{-16}{20}}-0{,}5\right)\cos\frac{\pi}{3}}{\left(0{,}5\cdot 10^{\frac{-16}{20}}+0{,}5\right)\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\approx 2{,}56 \mathrel{\widehat{=}} 147°$$