Kommunikationstechnik I

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 2. Aufgabenblatt

1. Schallpegel

Ein näherungsweise kugelförmig abstrahlender Lautsprecher erzeugt in einem Abstand von 1 m einen Schalldruckpegel L_1

1.1 Um wieviel dB verringert sich in der doppelten Entfernung

a. der Schalldruckpegel
b. der Schallintensitätspegel
c. der Schallschnellepegel bei einer Frequenz von 100 Hz

<u>a. Schalldruckabnahme</u>
Berechnung des Schalldrucks einer Kugelquelle:

$$p(r,t) = \frac{A_0}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

Änderung des Schalldruckpegels:
Wir betrachten $p(r_0)$ und $p(2 \cdot r_0)$ und berechnen den relativen Pegel:

$$\Delta L_p = 10 \cdot \log_{10} \left| \frac{p(2 \cdot r_0)}{p(r_0)} \right|^2 = 10 \cdot \lg \left| \frac{\frac{A_0}{2r_0} e^{j(\omega t - k2r_0)}}{\frac{A_0}{r_0} e^{j(\omega t - kr_0)}} \right| = 10 \cdot \lg \left| \frac{1}{2} e^{-jkr_0} \right|^2 = 20 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -6{,}02 dB$$

<u>b. Schallintensitätsabnahme</u>
Berechnung der Intensität einer Kugelquelle:

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Änderung des Schallintensitätspegels

$$\Delta L_I = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I(2 \cdot r_0)}{I(r_0)} \right) = 10 \cdot \lg \left(\frac{\frac{P}{4\pi (2r_0)^2}}{\frac{P}{4\pi r_0^2}} \right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{1}{4}\right) = -6{,}02 dB$$

c. Abnahme der Schallschnelle (f_0=100Hz)

Berechnung der Schallschnelle einer Kugelquelle:

$$v(r,t)=\frac{A_0}{r}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r}\right)e^{j(\omega t-kr)}$$

Änderung des Schnellepegels:

$$\Delta L_v=10\lg\left|\frac{v(2r_0)}{v(r_0)}\right|^2=10\lg\left|\frac{\frac{A_0}{2r_0}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho 2r_0}\right)e^{j(\omega t-k2r_0)}}{\frac{A_0}{r_0}\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r_0}\right)e^{j(\omega t-kr_0)}}\right|^2$$

$$=10\lg\left|\frac{1}{2}e^{-jkr_0}\right|^2+10\lg\left|\frac{\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho 2r_0}\right)}{\left(\frac{1}{\rho c}+\frac{1}{j\omega\rho r_0}\right)}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{j\omega r_0+\frac{1}{2}c}{j\omega r_0+c}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\left(j\omega r_0+\frac{1}{2}c\right)(c-j\omega r_0)}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{j\omega c r_0+\frac{1}{2}c^2+\omega^2 r_0^2-\frac{1}{2}j\omega c r_0}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\frac{1}{2}c^2+\omega^2 r_0^2+\frac{1}{2}j\omega c r_0}{\omega^2 r_0^2+c^2}\right|^2\ ,c=343\frac{m}{s},\omega=2\pi f_0=2\pi 100Hz,r_0=1m$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|\frac{\frac{1}{2}(343\frac{m}{s})^2+4\pi^2\cdot 100^2\frac{m^2}{s^2}+j\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 100\frac{1}{s}\cdot 343\frac{m}{s}\cdot 1m}{4\pi^2\cdot 100^2\frac{m^2}{s^2}+(343\frac{m}{s})^2}\right|^2$$

$$=-6{,}02dB+10\lg\left|0{,}8852+j\cdot 0{,}2103\right|^2$$

$$=-6{,}02dB-0{,}82dB$$

$$=-6{,}84dB$$

Anmerkung: Die Abnahme von 6,84 dB gilt nicht generell für die Abnahme des Schallschnellepegels, sondern lediglich für diese Bedingungen.

1.2 Berechnen Sie für L_1 = 90 dB und f = 100 Hz den Schalldruck, die Schallschnelle und die Schallintensität in 1 m und 2 m Entfernung und recherchieren Sie die dafür notwendigen Materialkonstanten.

<u>Schalldruck:</u>
Der absolute Schalldruckpegel errechnet sich nach

$L = 20\lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$, mit $p_0 = 2\cdot10^{-5}$ Pa

Dadurch ergeben sich folgende Werte für den Schalldruck in 1m und 2m Entfernung:

1m: $p_1 = p_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{20}} = 2\cdot10^{-5} Pa \cdot 10^{\frac{90}{20}} = 0{,}632 Pa$

2m: $p_1 = p_0 \cdot 10^{\frac{L_1 - 6{,}02}{20}} = 2\cdot10^{-5} Pa \cdot 10^{\frac{83{,}98}{20}} = 0{,}316 Pa$

<u>Schallschnelle:</u>
Die Formel für die Schallschnelle lautete:

$v(r,t) = \frac{A_0}{r}\left(\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{j\omega\rho r}\right)e^{j(\omega t - kr)}$.

Dabei sind:

A_0 = r·p
ρ_{Luft} = 1,189 kg/m³
c_{Luft} = 343 m/s

Dadurch ergeben sich für den Betrag der Schallschnelle in 1m und 2m Entfernung folgende Werte:

1m:
$$v_1 = \left|\frac{0{,}632\frac{kg}{s^2}}{1m}\left(\frac{1}{1{,}189\frac{kg}{m^3}\cdot 343\frac{m}{s}} + \frac{1}{j\cdot 2\pi\cdot 100\frac{1}{s}\cdot 1{,}189\frac{kg}{m^3}\cdot 1m}\right)\right|$$
$$= \left|0{,}632\frac{kg}{s^2 m}\left(\frac{1}{407{,}83\frac{kg}{m^2 s}} - j\frac{1}{747{,}07\frac{kg}{m^2 s}}\right)\right|$$
$$= 0{,}632\frac{kg}{s^2 m}\cdot 2{,}79\cdot10^{-3}\frac{m^2 s}{kg}$$
$$= 0{,}00176\frac{m}{s}$$

2m: $v_2 = 10^{-\frac{6{,}8}{20}} \cdot 0{,}00176\frac{m}{s} = 8{,}045\cdot10^{-4}\frac{m}{s}$

Schallintensität:
I = p·v

1m: $I_1 = p_1 \cdot v_1 = 0{,}632 Pa \cdot 0{,}00176 \frac{m}{s} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$

2m: $I_1 = p_1 \cdot v_1 = 0{,}316 Pa \cdot 8{,}04 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{W}{m^2}$

1.3 Eine Geige erzeuge am Hörerort x den Schalldruckpegel L.

Um wieviel dB ändert sich am Hörerort der Schalldruckpegel, wenn die „Orchesterbesetzung“ von einer Geige auf zwei Geigen (in gleicher Entfernung vom Hörer) erhöht wird ? (Hinweis: Handelt es sich um kohärente oder inkohärente Schallquellen? Wie addieren sich die physikalischen Schallgrößen ?)

Die Signale der beiden Geigen sind inkohärent. Bei inkohärente Schallquellen Addieren sich deren Leistungen und nicht die zugrunde liegenden Feldgrößen.

Demnach ergibt sich der Gesamtpegel zweier Schallquellen mit gleichem Schalldruck p_1 wie folgt:

$$L_{ges} = 10 \cdot \lg\left(\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right) = 10 \cdot \lg\left(2 \cdot \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2\right)$$

$$= \underbrace{10 \cdot \lg\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2}_{\text{Schalldruckpegel einer einzelnen Geige}} + \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{\text{Pegelzunahme}}$$

Die Pegelzunahme bei Verdopplung der Besetzung beträgt 10·lg(2) = 3,01 dB.

Aus der Psychoakustik ist bekannt, daß für eine subjektive Verdopplung der Lautheit eine Zunahme des Schalldruckpegels von 10 dB notwendig ist. Wieviel Geigen sind hierfür notwendig ?

$$\Delta L = 10 dB = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_{\text{mehrere Geigen}}}{P_{\text{eine Geige}}}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\text{mehrere Geigen}} = 10^{\frac{10}{10}} \cdot P_{\text{eine Geige}} = 10 \cdot P_{\text{eine Geige}}$$

Für eine Zunahme des Schalldruckpegels ist die 10-fache Leistung notwendig. Es werden demnach 10 Geigen benötigt um subjektiv die doppelte Lautstärke zu empfinden.

2. Nahfeld und Fernfeld

2.1 Beschreiben Sie die drei unterschiedlichen Kriterien, unter denen die Begriffe „Nahfeld“ und „Fernfeld“ definiert werden.

Es existieren unterschiedliche Kriterien, die die Begriffe Nah- und Fernfeld definieren, die auf unterschiedliche Eigenschaften des Schallfelds Bezug nehmen.

Das erste Kriterium besagt, dass es im Nahfeld ortsabhängig starke Amplitudenunterschiede der Teilstrahler am Hörerort gibt. Befindet man sich also in der Nähe einer ausgedehnten Schallquelle, dann ist der Abstand zu den einzelnen Teilstrahlern sehr unterschiedlich, die Amplitude, mit der die Schallwellen der einzelnen Teilstrahler den Hörerort erreichen sind dementsprechend deutlich verschieden.
Je weiter man sich von der Schallquelle entfernt, desto weniger fallen diese unterschiedlichen Abstände ins Gewicht und man kann davon ausgehen, dass die Amplitudenabnahme für alle Teilstrahler sich mehr und mehr angleicht, da die Schallwellen aller Teilstrahler ungefähr den gleichen Weg zum Hörerort zurücklegen.
Es gilt das Fernfeldkriterium:
$r \gg h$, wobei h die Abmessungen der Schallquelle bezeichnet.
Wichtig hierbei ist, dass über die unterschiedliche Phasenlage, mit der die einzelnen Schallwellen eintreffen hierbei nichts ausgesagt wird, dies wird durch das zweite Kriterium ausgedrückt.

Nach dem zweiten Kriterium wird das Fernfeld dadurch charakterisiert, dass sich die Phasenunterschiede, mit denen sich die Beiträge verschiedener Bereiche des Strahlers beim Betrachter überlagern, als Funktion des Winkels beschreiben lassen, unter dem sich der Betrachter vom Mittelpunkt des Strahlers aus gesehen befindet.
In der Nähe einer ausgedehnten Schallquelle sind die Überlagerungen (Interferenzen) der Teilstrahler sehr komplex. Betrachtet man z.B. das Interferenzmuster zweier Punktquellen, und betrachtet diese als Endpunkte eines Linienstrahlers, dann wird schnell klar, dass die Phasenunterschiede in der Nähe der beiden Quellen nicht in Abhängigkeit des Winkels angegeben werden können.
Befindet man sich jedoch in größerer Entfernung zur Schallquelle, dann lässt sich vereinfachend annehmen, dass die Schallwellen unterschiedlicher Teilstrahler den Betrachter annähernd parallel erreichen. In diesem Fall lässt sich die Wegdifferenz (und damit auch die Phasendifferenz) beschreiben als $r_2 - r_1 = h\cos\theta$, sie hängt also nur noch vom Winkel ab.
Da eine bestimmte Wegdifferenz für verschiedene Frequenzen unterschiedliche Phasenunterschiede bewirkt, ist der Nahfeld-/Fernfeld-Übergang frequenzabhängig. Es gilt das Fernfeldkriterium:

$$r > \frac{h^2}{\lambda}$$

Dieses Kriterium ist die Voraussetzung dafür, dass eine Richtwirkung der Schallquelle angegeben werden kann. Im Nahfeld kann man über bevorzugte und benachteiligte Abstrahlrichtungen einer Schallquelle keine Aussage machen.

Das dritte Kriterium beruht auf der Tatsache, dass Druck und Schnelle in entsprechender Entfernung von der Schallquelle phasengleich sind, während sie in der Nähe der Schallquelle um 90° phasenverschob en sind. Dies ist am einfachsten nachvollziehbar, wenn man sich die Gleichungen für den Schalldruck und die Schallschnelle ansieht:

Schalldruck: $$p(r) = \frac{A}{r} e^{-jkr}$$

Schallschnelle: $$v(r) = \frac{A}{r}\left(\frac{1}{\rho_0 c} + \frac{1}{j\omega\rho_0 r}\right)e^{-jkr} = \frac{A}{r}\left(\frac{1}{\rho_0 c} - j\frac{1}{\omega\rho_0 r}\right)e^{-jkr}$$

Betrachtet man den Fall, das man sich in sehr großer Entfernung von der Schallquelle befindet, also r→∞, dann wird der Klammerterm in der Gleichung der Schallschnelle rein reell, da der zweite Bruch gegen 0 geht. Die Phasen von Druck und Schnelle sind demnach gleich. Desweiteren nehmen Druck und Schnelle mit 1/r ab.
Betrachtet man den umgekehrten Fall, dass man sich sehr nah an der Schallquelle befindet, dann wird der zweite Bruch in den Klammern sehr groß und überwiegt den ersten Bruch, sodass sich eine Phasenverschiebung von 90° bzw. π/2 ergibt. Die Schnelle nimmt mit $1/r^2$, der Druck jedoch weiterhin mit 1/r ab.
Als Übergang zwischen Nah- und Fernfeld bezeichnet man nun den Abstand r, bei dem die Phasenverschiebung zwischen Druck und Schnelle genau 45° beträgt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Brüche im Klammerterm der Gleichung für die Schallschnelle gleich groß sind. Demnach ergibt sich als Fernfeldbedingung:

$\frac{1}{\omega\rho_0 r} < \frac{1}{\rho_0 c}$ bzw., wenn man die Ungleichung umstellt:

$$r > \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

2.2 Betrachten Sie die Abstrahlung einer Klarinette (h = 0.66 m) und berechnen Sie den Übergang von Nahfeld und Fernfeld für jedes der drei Kriterien.
Für das zweite und dritte Kriterium sei angenommen, der Hörer befinde sich in einer Entfernung von 1,50 m vom Instrument. Für welche Frequenzen befindet er sich im Nahfeld, für welche im Fernfeld?

1. Kriterium:

r >> 0.66 m

2. Kriterium

$$r > \frac{h^2}{\lambda} = \frac{h^2 f}{c}$$

$$\Rightarrow f < \frac{r \cdot c}{h^2} = \frac{1{,}50m \cdot 343\frac{m}{s}}{(0{,}66m)^2} = 1{,}18kHz$$

3. Kriterium

$$r < \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{2\pi f}$$

$$\Rightarrow f < \frac{c}{2\pi r} = \frac{343\frac{m}{s}}{2\pi \cdot 1{,}50m} = 36{,}39Hz$$

2.3 Welche Konsequenzen ergeben sich aus den unterschiedlichen Kriterien für die Tonaufnahme?

1. Kriterium:

In der Nähe des Instruments ergibt sich eine starke Abhängigkeit der Klangfarbe von der Position, an der das Mikrofon aufgestellt wird. Befindet man sich in der Nähe des Mundstücks, wird dieses wesentlich stärker bevorzugt, als der Klang der aus den Klappenöffnungen kommt. In größerer Entfernung zum Instrument verschwindet dieser Unterschied.

2. Kriterium:

Befindet man sich in der Nähe der Klarinette, dann kann schon eine kleine Änderung des Aufstellungsortes des Mikrofons eine deutliche Änderung der Klangfarbe hervorrufen, da an den beiden Orten jeweils unterschiedliche Frequenzbereiche von Abschwächung und Verstärkung betroffen sind.

Darüber hinaus gelten die angegebenen Abstrahlcharakteristiken des Instruments nur im Fernfeld. In unserem konkreten Beispiel, ist also die Abstrahlcharakteristik des Instruments für tiefe Frequenzen besser eingehalten als für hohe.

3. Kriterium:

Für Mikrofone, deren Ausgangsspannung proportional zur Schallschnelle ist (Druckgradientenempfänger), ist in der Nähe der Schallquelle ein Anstieg der tiefen Frequenzen im Vergleich zu einer entfernteren Position zu verzeichnen.