Prof. Dr. Stefan Weinzierl 14.11.2013

Nachtrag zur Linearität rekursiver Systeme

Die Eigenschaft der Lineartität lässt sich für Systeme mit rekursiven Termen nicht mit dem gleichen Formalismus beweisen, der für nicht-rekursive Systeme gilt. Stattdessen gilt Folgendes:
Ist ein System darstellbar durch eine lineare Differenzengleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_k x[n-m]$$

und ist als Randbedingung gegeben, dass sich das System im *Anfangsruhezustand* befindet, so ist das System linear, zeitinvariant und kausal.

Zum Begriff des Anfangsruhezustands und der Randbedingung in einem rekursiven System

Bei einem rekursiven System greift man per Definition auf zurückliegende Ausgabewerte zu. Diese müssen vor der Berechnung eines Ausgabewerts gegeben sein. Da man aber vor dem ersten Eingabewert allerdings noch keine Ausgabewerte berechnet hat, muss man die initialen Ausgabewerte als Randbedingung mit angeben. Betrachtet man beispielsweise das System:

$$y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n]$$

so sieht man, dass man hier nur auf den ersten vergangenen Ausgabewert zugreift. Will man also den Ausgabewert an der Stelle n berechnen, braucht man den Ausgabewert an der Stelle $n-1$. Für eine Eingangsfolge der Form $x[n] = K \cdot \delta[n]$, die nur an der Stelle $n = 0$ einen Ausgabewert ungleich 0 (und zwar$K$) hat, muss man also als Randbedingung angeben, welchen Wert die Ausgabefolge $y[n]$ an der Stelle $n = -1$ hat. Der Anfangsruhezustand ist nun so definiert, dass alle vergangenen Ausgabewerte, die als Randbedingung mit angegeben werden null sein müssen. Wenn man auf mehrere vergangene Ausgabewerte in der Differenzengleichung zugreift, so müssen alle null sein, vor dem ersten Eingabewert, der nicht null ist.
Allgemeiner ausgedrückt, kann man den Anfangsruhezustand auch so formulieren: Angenommen, man hat eine Eingangsfolge $x[n]$, die bis zu einem Zeitpunkt n_0 identisch null ist, so muss ein System, welches sich im Anfangsruhezustand befindet, eine Ausgabefolge $y[n]$ liefern, die für alle $n < n_0$ ebenfalls null ist.

Sonstige Bemerkungen

Das ein System in Form einer linearen Differenzengleichung linear ist, wenn man von einem Anfangsruhezustand ausgeht, ist relativ anschaulich, wenn man sich das System aufgeteilt vorstellt in ein rekursives und ein nicht-rekursives System. Die Linearität des nicht-rekursiven Systems lässt sich mit dem uns schon bekannten Formalismus

$$T\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = a \cdot T\{x_1[n]\} + b \cdot T\{x_2[n]\}$$

beweisen. Das rekursive System nimmt nun die Ausgabewerte des nicht-rekursiven Systems und wendet nur lineare Operationen (Addition/Subtraktion nach evtl. Multiplikation der alten Ausgabewerte) darauf an.

Die Linearität von Systemen, die mit einer linearen Differenzengleichung darstellbar sind, steckt im Prinzip schon in der Tatsache, dass sie sich überhaupt als lineare Differenzengleichungen darstellen lassen. Das Einzige, was so eine Differenzengleichung nicht-linear werden lassen könnte, sind Rand-/Anfangsbedingungen, die ein nicht lineares Element einfügen; in unserem Fall also Randbedingungen, die nicht gleich null sind.
Im Oppenheim-Schafer finden sich die hier besprochenen Punkte auf den Seiten 71/72.