Polynomdivision

Ist der schriftlichen Division ähnlich:

Bsp:

$$
\begin{array}{l}
960 : 3 = 320 \\
\underline{-9} \\
06 \\
\underline{-6} \\
\;\;00 \\
\underline{-\;0} \\
\;\;\;0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
221 : 2 = 11 + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{Rest}} \\
\underline{-2} \\
02 \\
\underline{-2} \\
01
\end{array}
$$

Einziger Unterschied ist, dass man Polynome durcheinander teilt:

Bsp:

$$
\begin{array}{l}
(6x^3 + 8x^2 + 2x) : (3x + 1) = 2x^2 + 2x \\
\underline{-(6x^3 + 2x^2)} \\
\qquad\quad 6x^2 + 2x \\
\qquad \underline{-(6x^2 + 2x)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Bsp:

$$
\frac{2x^2 + 4x + 4}{x + 1} \Rightarrow
\begin{array}{l}
(2x^2 + 4x + 4) : (x + 1) = 2x + 2 + \underbrace{\frac{2}{(x+1)}}_{\text{Rest}} \\
\underline{-(2x^2 + 2x)} \\
\qquad\quad 2x + 4 \\
\qquad \underline{-(2x + 2)} \\
\qquad\qquad\; 2
\end{array}
$$

Die Polynomdivision kommt ins Spiel, wenn die Anzahl an von Null verschiedenen Nullen gleich oder größer der Anzahl an von Null verschiedenen Pole ist.

In Gleichungen ausgedrückt:

Wenn eine Folge/System sich als rationale Funktion der Form

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \qquad (1)$$

darstellen lässt mit c_k: von Null verschiedene Nullstellen

d_k: " " " Polstellen

dann lässt sich für einfache Pole und $M < N$ eine Partialbruchzerlegung der Form:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})} \quad \text{mit} \quad A_k = \left[(1 - d_k z^{-1}) \cdot H(z) \right]_{z = d_k}$$

durchführen.

Für $M \geq N$ ~~xxx~~ führt man eine Polynomdivision durch, die dazu führt, dass man einen Ausdruck erhält, der $M < N$ genügt.

$\underline{\text{Bsp}}$: $X(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$ $\qquad |z|>1$

Wir versuchen dies nun auf die Form in (1) zu bringen. Dazu erweitern wir mit z^2, also der niedrigsten Potenz invertiert.

$$X(z) = \frac{z^2+2z+1}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$$

Wir entdecken im Zähler eine binomische Formel und den Nenner zerlegen wir in Linearfaktoren der Form $(z-d_k)$ mit d_k: Nullstelle des Nenners. Hierzu werden wir die pq-Formel an:

$$z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{8}{16}} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

$$z_2 = \frac{3}{4}-\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4}-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

Um auf die Form (1) zukommen erweitern wir mit z^{-2}:

$$X(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Wie wir sehen, haben wir hier den Fall $M=N$.

Wir wenden eine Polynomdivision an:

$$\begin{aligned}&(z^{-2}+2z^{-1}+1):(\tfrac{1}{2}z^{-2}-\tfrac{3}{2}z^{-1}+1)=2+\underbrace{\frac{5z^{-1}-1}{(\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1)}}_{\text{Rest}}\\&\underline{-(z^{-2}-3z^{-1}+2)}\\&\qquad 5z^{-1}-1\end{aligned}$$

Wir müssen nur einen Schritt durchführen um auf ein Restpolynom zu kommen, das unseren Anforderungen genügt.

$$X(z)=2+\frac{5z^{-1}-1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Hierauf wenden wir nun die Partialbruchzerlegung an:

$$X(z)=2+\frac{A_1}{(1-z^{-1})}+\frac{A_2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Mit $A_1=\left[(1-z^{-1})\,X(z)\right]_{z=1}$

$$=\left[(1-z^{-1})\left(2+\frac{5z^{-1}-1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right)\right]_{z=1}$$

$$=\frac{5\cdot 1-1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

$$A_2=\left[(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\,X(z)\right]_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5\cdot 2-1}{1-2}=-9$$

Also erhalten wir für unser $X(z)$:

$$X(z) = 2 + 8 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} - 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Linearität, Konvergenzbereich und das Tabellenverfahren führen uns zu folgender Rücktransformierten:

$$x[n] = 2\delta[n] + 8 \cdot u[n] - 9 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm sieht übrigens so aus: