

14. EDS - Tutorium

Fensterung

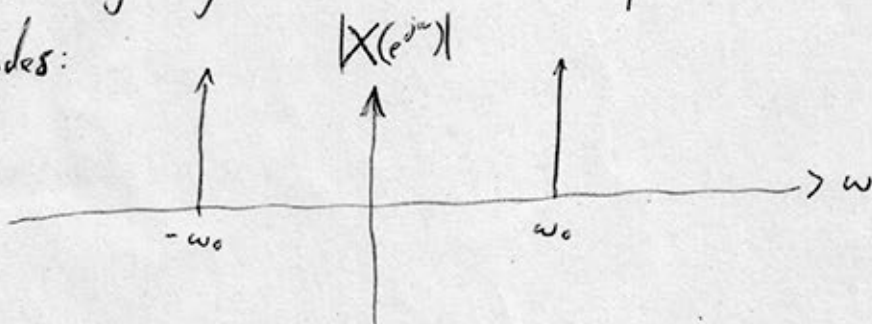
Der Begriff der Fensterung beschreibt ein Ausschneiden und Gewichten eines Signalabschnitts bestimmter Länge und wird u. a. in der Frequenzanalyse verwendet.

Zum Einstieg ein Beispiel:

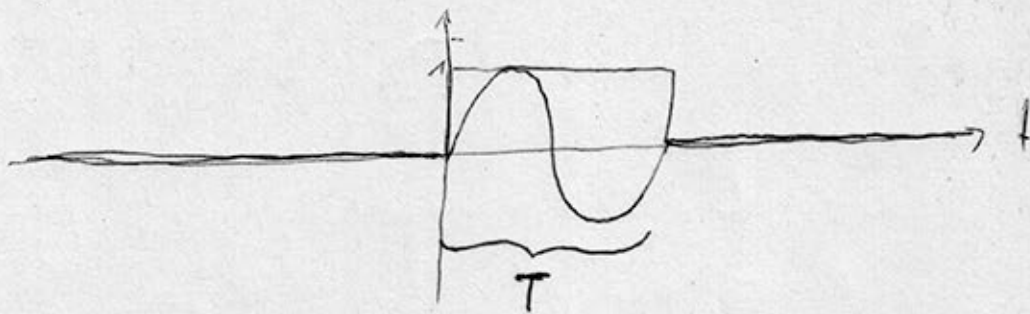
Angenommen wir haben ein unendlich langes, kontinuierliches Sinussignal (mit Frequenz ω_0):



Das dazu gehörige kontinuierliche Spektrum wäre folgendes:



Begrenzen wir uns auf einen endlichen Bereich des Sinussignals und multiplizieren den Rest des Signals mit 0 würde dies einer Fensterung entsprechen:



Um genau zu sein entspricht dies einer Rechteckfensterung.

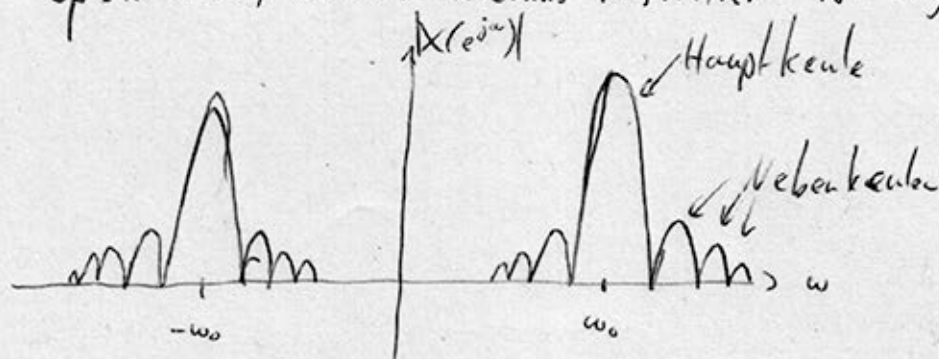
Wir multiplizieren also im Zeitbereich Sinussignal und Rechteckfenster:

$$y(t) = \sin(\omega t) \cdot w_{\text{RECT}}(t)$$

$$\text{mit } w_{\text{RECT}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine Multiplikation im Zeitbereich entspricht einer Faltung im ~~Zeitbereich~~ Frequenzbereich und somit heißt dies, dass das Spektrum des Sinussignals mit dem Spektrum des Rechteckfensters „verschmiert“ wird.

Das Spektrum, welches hieraus resultiert ist folgendes

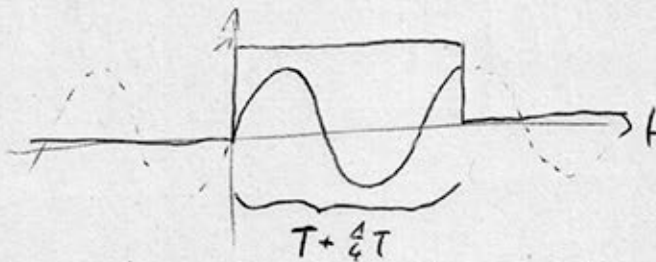


Was wir sehen ist das Spektrum des Fensters verschoben um ω_0 und $-\omega_0$. Diese „Verschmierung“ des Spektrums wird auch Leakage-Effekt, Fenster-Effekt oder Lock-Effekt genannt. Statt eines Rechteckfensters kann man natürlich auch andere Fenster bzw. Gewichtsformen nehmen, die dann auch ein anderes Spektrum hätten. Dazu kommen wir ~~im~~ im Rahmen von diskreten Signalen und Spektren gleich noch einmal zurück.

Vorher noch einige wichtige Fälle des Fensterens:

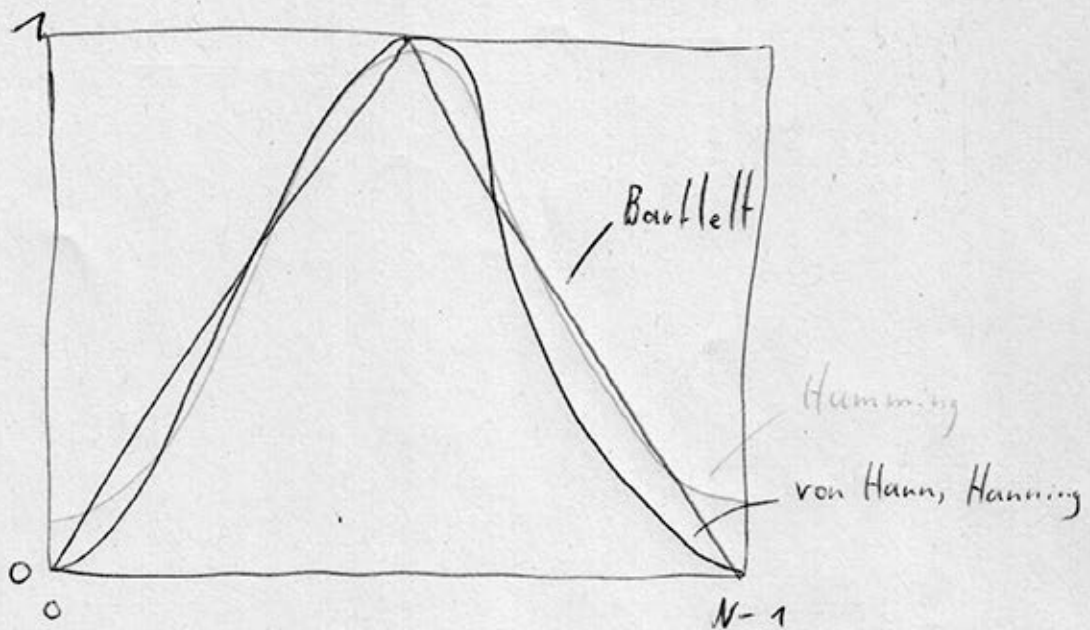
Fensterung von nicht-ganzzahligen Vielfachen der Signalperiode:

Kommt es zu einer ~~Wahl~~ Fensterung dieser Art:



Bekäme man ein Problem beim Spektrum, denn nun enthält unser Signal ein plötzliches „Abknicken“ an der Stelle $T + \frac{1}{4}T$, dass nur durch hohe Frequenzen im Spektrum zustand kommen kann. Somit führt man durch falsches Fenster dem Signal hochfrequente Anteile hinzu, die eigentlich nicht vorhanden sind. Da wir bei der Frequenzanalyse meistens im Vorhinein nicht wissen welche Periodizitäten im Signal stecken wird es schwierig ein optimales Rechteckfenster anzusetzen. Hierfür ~~es~~ sind Fensterfunktionen geeignet, die an Rand langsam gegen Null streben und das Signal somit sanft ein- und wieder ausblenden.

Dieses sanftere Ein- und Ausblenden erkauft man sich allerdings durch breitere Hauptkeulen (\rightarrow schlechtere Frequenzauflösung), oder schlechtere Nebenkeulen unterdrückung. Einige Typische Fenster:



Je nach Anwendungsgebiet muss man das optimale Fenster auswählen. Dabei geht es immer um einen Trade-Off aus Frequenzselektivität/Hauptkeulenbreite und Nebenkeulenunterdrückung.

Man kann sich vorstellen, dass bei zwei nah beieinanderliegenden (Frequenzmäßig gesehen) Signalen eine breite Hauptkeule nachteilig für die Frequenzanalyse ist um beider Signale im Spektrum aneinanderhalten zu können.

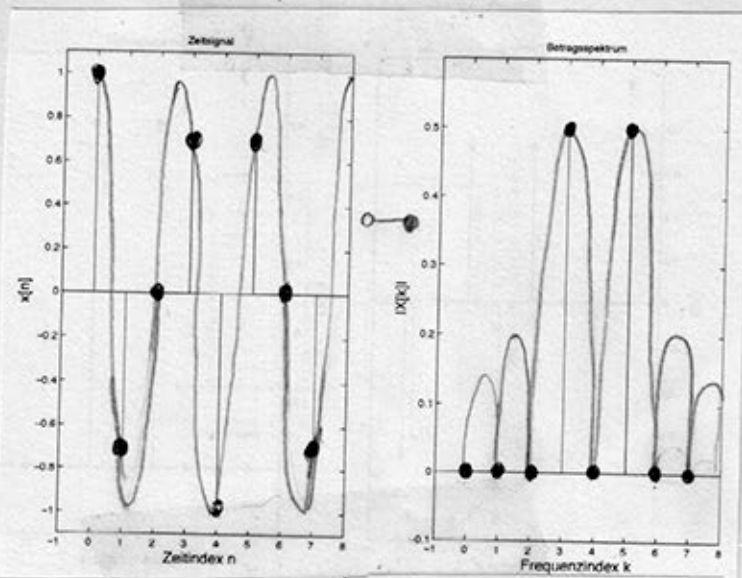
Diskreter Fall

Für diskrete Signale und Spektren gelten alle vorher besprochenen Punkte ebenso.

~~Beispiel~~

In der Praxis werden Signale oft in Blöcken verarbeitet. Durch diese Blockbildung erhält man natürlich gleich wieder einen Fenstereffekt, der allerdings in diskreten Spektren nicht unbedingt auftreten muss, wenn die Blocklänge einen ganzzahligen Vielfachen der Grundperiode des Signals entspricht. Dies soll das nächste Bild veranschaulichen:

Optimalfall



Worst-Case

