Einführung in die digitale Signalverarbeitung: 10. Tutorium

Technische Universität Berlin

Prof. Dr. Stefan Weinzierl 19.12.2013

Musterlösung: 9. Januar 2014, 17:58

1

Gegeben sei ein stabiles LTI-System mit $x[n]$ als Eingangsfolge und $y[n]$ als Ausgangsfolge, dass folgende Differenzengleichung erfüllt:

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

a) Stellen Sie Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion in der z-Ebene dar.

Lösung: Wir bilden die Übertragungsfunktion, indem wir in den z-Bereich transformieren:

$$\begin{aligned} Y(z)\left(z^{-1} - \frac{10}{3} + z^{1}\right) &= X(z) \\ \Rightarrow H(z) &= \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z^{1}} \\ &= \frac{z}{1 - \frac{10}{3} + z^{2}} \\ &= \frac{z}{(z-3)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad (1) \\ &= \frac{z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \qquad (2) \\ &= \frac{z^{-1}}{z^{-2} - \frac{10}{3}z^{-1} + 1} \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus Gleichung 1 Können wir ablesen, das sich eine Nullstelle bei $z = 0$ befindet. Die Pollstellen befinden sich bei $z = 3$ und $z = \frac{1}{3}$. Das Pol-Nullstellen-Diagramm findet sich in Abbildung 1. Da es sich um ein stabiles LTI-System handelt muss der Konvergenzbereich den Einheitskreis einschließen.

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort h[n].

Lösung: Wir benutzen die Übertragungsfunktion in der Form aus Gleichung 2:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

Hierauf wenden wir eine Partialbruchzerlegung an. Hierdurch schreiben wir die Übertragungsfunktion als:

$$H(z) = \frac{A_1}{(1-3z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

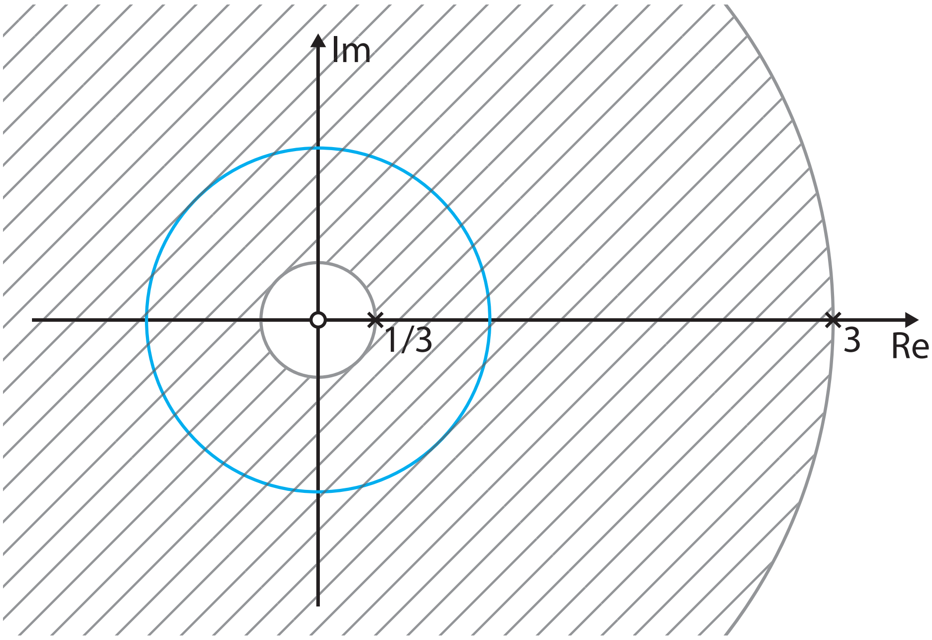

Abbildung 1: Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems aus Aufgabe 1

Mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[(1-3z^{-1})\cdot H(z)\right]_{z=3} \\
&= \left[\frac{(1-3z^{-1})z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\right]_{z=3} \\
&= \left[\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\right]_{z=3} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left[(1-\frac{1}{3}z^{-1})\cdot H(z)\right]_{z=\frac{1}{3}} \\
&= \left[\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{3}} \\
&= \left[\frac{z^{-1}}{(1-3z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{1-9} \\
&= -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$H(z) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(z-3)} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(z-\frac{1}{3})}$$

Hier erkennen wir zwei bekannte Transformationspaare. Es ist jedoch zu beachten, dass $h[n]$ offensichtlich eine zweiseitige Folge sein muss, bzw. aus einer rechtsseitigen und einer linksseitigen Folge bestehen muss. Der Konvergenzbereich der rechtsseitigen Folge muss dabei $z > \frac{1}{3}$ sein und der Konvergenzbereich der linksseitigen Folge muss $z < 3$ sein. Damit ergibt sich eine Impulsantwort:

$$h[n] = -\frac{3}{8}3^n u[-n-1] - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{4}$$

2

Gegeben sei ein kausales LTI-System, dass folgende Differenzengleichung erfüllt:

$$y[n] = \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

a) Bestimmen sie die Übertragungsfunktion des Systems. Stellen Sie Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion grafisch dar und geben Sie den Konvergenzbereich an.

Wir transformieren wieder in den z-Bereich:

$$\begin{aligned} Y(z)\left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) &= X(z)z^{-1} \\ \Rightarrow H(z) &= \frac{z^{-1}}{-z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1} \\ &= \frac{z}{(z-2)(z+\frac{1}{2})} \qquad (5) \\ &= \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \qquad (6) \end{aligned}$$

Aus Gleichung 5 sehen wir nun, dass die Nullstelle sich bei $z = 0$ befindet und die Polstellen bei $z = 2$ und $z = -\frac{1}{2}$. Eine Darstellung findet sich in Abbildung 2. Da es sich um ein kausales System handelt muss der Konvergenzbereich vom größten Pol nach aussen unendlich ausgedehnt sein; in diesem Fall also ist der Konvergenzbereich $z > 2$.

b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

Wir benutzen Gleichung 6 um eine Partialbruchzerlegung durchzuführen:

$$H(z) = \frac{A_1}{(1-2z^{-1})} + \frac{A_2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Mit:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[(1-2z^{-1}) \cdot H(z)\right]_{z=2} \\ &= \left[\frac{(1-2z^{-1})z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right]_{z=2} \\ &= \left[\frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right]_{z=2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

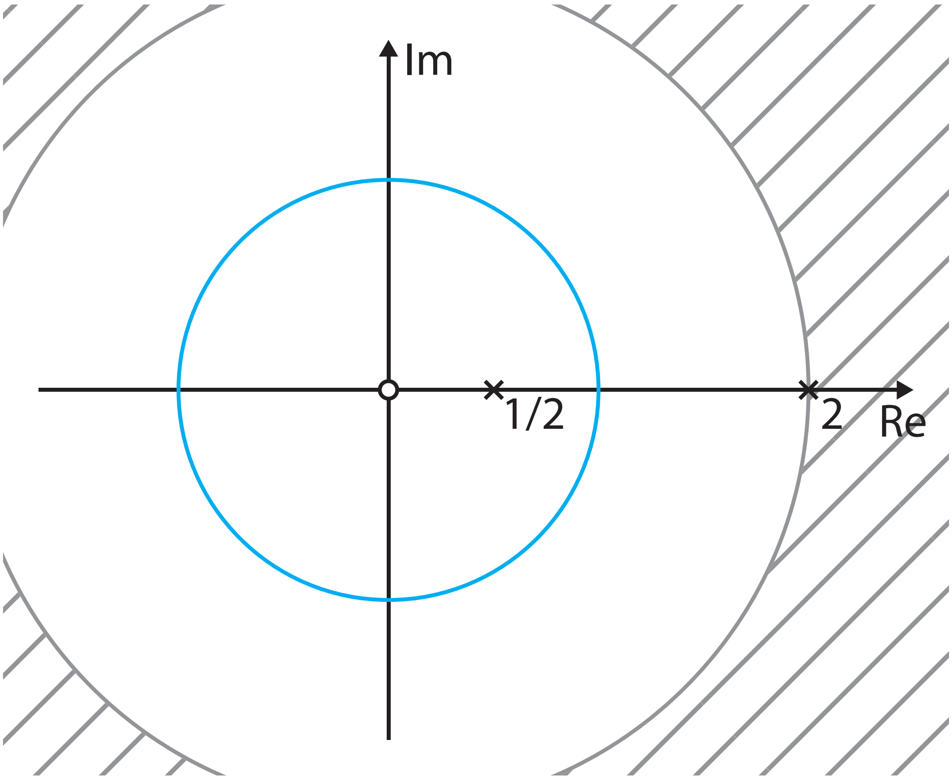

Abbildung 2: Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems aus Aufgabe 2

und:

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \left[(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cdot H(z)\right]_{z=\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-2}{1+4} \\
&= -\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Das ergibt:

$$
H(z) = \frac{2}{5}\frac{1}{(1-2z^{-1})} - \frac{2}{5}\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}
$$

Mit dem Tabellenverfahren und der Information, dass der Konvergenzbereich $z > 2$ ist, ergibt sich folgende Impulsantwort:

$$
h[n] = \frac{2}{5}2^n u[n] - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]
$$

c) Ist das System stabil? Ermitteln Sie eine stabile Impulsantwort, die dieselbe Differenzengleichung erfüllt, wenn dies nicht der Fall sein sollte.

Das System ist nicht stabil, da es den Einheitskreis nicht einschließt. Dies wäre nur erfüllt, wenn das System nicht kausal und die Impulsantwort zweiseitig ist:

$$h[n] = -\frac{2}{5}2^n u[-n-1] - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

3

Ein kausales LTI-System hat folgende Systemfunktion:

$$H(z) = \frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-9z^{-2})}{1+0.81z^{-2}}$$

a) Ist das System stabil?

Lösung: Um die Stabilität anhand der Gleichung zu sehen, schreiben wir um:

$$H(z) = \frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-9z^{-2})}{(1-j\cdot 0.9z^{-1})(1+j\cdot 0.9z^{-1})}$$

Die Pole dieses System befinden sich also bei $z = j\cdot 0.9$ und bei $z = -j\cdot 0.9$, also innerhalb des Einheitskreises und da es sich zusätzlich um ein kausales System handelt ist es stabil.

b) Formulieren Sie die Ausdrücke für ein Minimalphasensystem $H_1(z)$ und einen Allpass $H_{ap}(z)$, sodass

$$H(z) = H_1(z)\cdot H_{ap}(z)$$

Wir schreiben den Zähler um, damit wir sehen, welche Nullstellen ausserhalb des Einheitskreises liegen:

$$H(z) = \frac{(1+0.2z^{-1})(1-3z^{-1})(1+3z^{-1})}{(1-j\cdot 0.9z^{-1})(1+j\cdot 0.9z^{-1})}$$

Wie wir sehen, befinden sich zwei Nullstellen ausserhalb des Einheitskreises bei $z = 3$ und bei $z = -3$.
Zur Erinnerung: Der Formalismus den wir in der Vorlesung benutzt haben war Folgender:
Wenn $H(z)$ eine Nullstelle ausserhalb des Einheitskreises hat an der Stelle $z = \frac{1}{c^*}$, so kann man diese vom Ausdruck abspalten in der Form:

$$H(z) = H_1(z)\cdot(z^{-1}-c^*) \tag{7}$$

Nun multipliziert man noch mit 1 indem man mit $\frac{(1-cz^{-1})}{(1-cz^{-1})}$ multipliziert und erhält somit eine Aufteilung des Systems in ein Minimalphasensystem und ein Allpasssystem:

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)\cdot(1-cz^{-1})}_{H_{min}(z)}\underbrace{\left(\frac{(z^{-1}-c^*)}{(1-cz^{-1})}\right)}_{H_{AP}(z)} \tag{8}$$

In unserem Fall haben wir zwei Nullstellen ausserhalb des Einheitskreises, die wir in Form von Gleichung 7 abspalten:

$$H(z) = \underbrace{-9\cdot\frac{(1+0.2z^{-1})}{(1-j\cdot 0.9z^{-1})(1+j\cdot 0.9z^{-1})}}_{H_1(z)}\cdot(z^{-1}+\frac{1}{3})(z^{-1}-\frac{1}{3})$$

nun multiplizieren wir noch mit 1 wie in Gleichung 8:

$$H(z) = \underbrace{-9 \cdot \frac{\left(1 + 0.2z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{(1 - j \cdot 0.9z^{-1})(1 + j \cdot 0.9z^{-1})}}_{H_{min}(z)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\left(z^{-1} + \frac{1}{3}\right)\left(z^{-1} - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}\right)}_{H_{AP}(z)}$$