Prof. Dr. Stefan Weinzierl 21.11.2013

Musterlösung: 3. Dezember 2013, 13:32

1 Z-Transformation eines verschobenen Einheitsmpulses

Gegeben sei die Folge $x[n] = \delta[n - n_0]$. Berechnen Sie ihre z-Transformierte, indem Sie sie in die Gleichung der z-Transformation einsetzen. Geben Sie auch den Konvergenzbereich an.

Wir setzen in die Analysegleichung ein:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] z^{-n}
\end{aligned}
$$

Diese Summe ist aufgrund der Delta-Funktion nur für einen Summanden ungleich null, und zwar an der Stelle $n = n_0$. Somit ergibt sich für die z-Transformierte:

$$X(z) = z^{-n_0}$$

Da es sich um eine endliche Folge mit nur einem Glied handelt, umfasst der Konvergenzbereich alle z-Werte mit folgenden Ausnahmen:

- Für $n_0 > 0$, gehört $z = 0$ nicht zum Konvergenzbereich
- Für $n_0 < 0$, gehört $z = \infty$ nicht zum Konvergenzbereich

2 Z-Transformation

a) Betrachten Sie die Signale

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= a^n u[n] \\
x_2[n] &= -a^n u[-n - 1]
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie die z-Transformierten und die Konvergenzbereiche.

Folge $x_1[n]$: Wir setzen in die Analysegleichung der z-Transformation ein:

$$
\begin{aligned}
X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}
\end{aligned}
$$

Der Einheitssprung $u[n]$ ist eine rechtsseitige Folge, d.h. die Folge hat nur von null verschiedene Werte für $n \geq 0$. Da also alle Summanden mit $n < 0$ null sind und der Einheitsprung für die restlichen Werte den Wert 1 hat, können wir die Summe umschreiben:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \end{aligned}$$

In der letzten Zeile handelt es sich um eine geometrische Reihe, wenn man annimmt, dass der Ausdruck in Klammern kleiner als 1 ist. Nur dann konvergiert die Reihe und wir können statt der Summe schreiben:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \text{ für } |z| > |a|$$

Das zugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm findet sich in Abbildung 1.

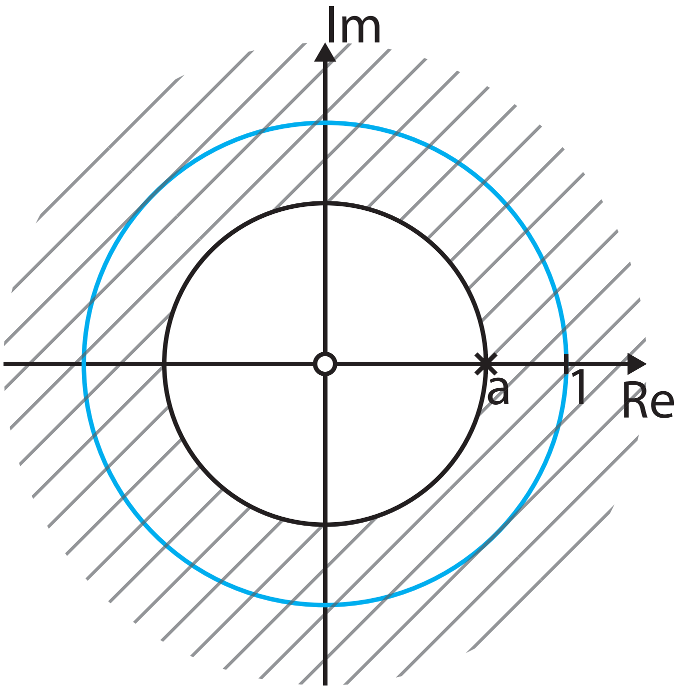

Abbildung 1: Pol-Nullstellen-Diagramm der Folge $x_1[n]$, Schraffierung deutet den Konvergenzbereich an, Kreuze sind Polstellen und Kreise sind Nullstellen

Folge $x_2[n]$: Das Verfahren ist das gleiche wie für $x_1[n]$; wir setzen die Folge in die Analysegleichung ein:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} \end{aligned}$$

Die Folge $u[-n-1]$ ist eine Folge, die für alle $n \leq -1$ eins wird und für alle anderen n null ist. Das heißt, diesmal kann man die Summe wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \end{aligned}$$

Ob man nun über (fast) alle negativen n summiert oder ob man über (fast) alle positiven n summiert und dafür die Vorzeichen in den Exponenten umkehrt, ist in diesem Fall das gleiche:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n \end{aligned}$$

Hier haben wir es wieder fast mit einer geometrischen Reihe zu tun, allerdings fehlt der erste Summand für $n = 0$. Diesen fügen wir in die Summe ein und da $-a^0 z^{-0} = -1$ ist, addieren wir noch eine 1 vor die Summe um Endeffekt ëine Null addiert zu haben".

$$\begin{aligned} X_2(z) &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \end{aligned}$$

Nun können wir wieder einen Konvergenzbereich angeben. Der Term in den Klammern muss kleiner 1 sein, und das ist erfüllt solange $|z| < |a|$ ist. Wir wenden die Gleichung für die geometrische Reihe an:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{1 - a^{-1} z - 1}{1 - a^{-1} z} \\ &= -\frac{a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} \cdot \frac{a z^{-1}}{a z^{-1}} = -\frac{1}{a z^{-1} - 1} \\ &= \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \text{ für } |z| < |a| \end{aligned}$$

Wie man sieht, erhalten wir die gleiche z-Transformierte wie für $x_1[n]$, mit dem Unteschied, dass der Konvergenzbereich ein anderer ist. Dieses Ergebnis unterstreicht den Punkt, dass eine z-Transformierte ohne angegebenen Konvergenzbereich (siehe Abbildung 2) nicht eindeutig einer Folge zugewiesen werden kann.

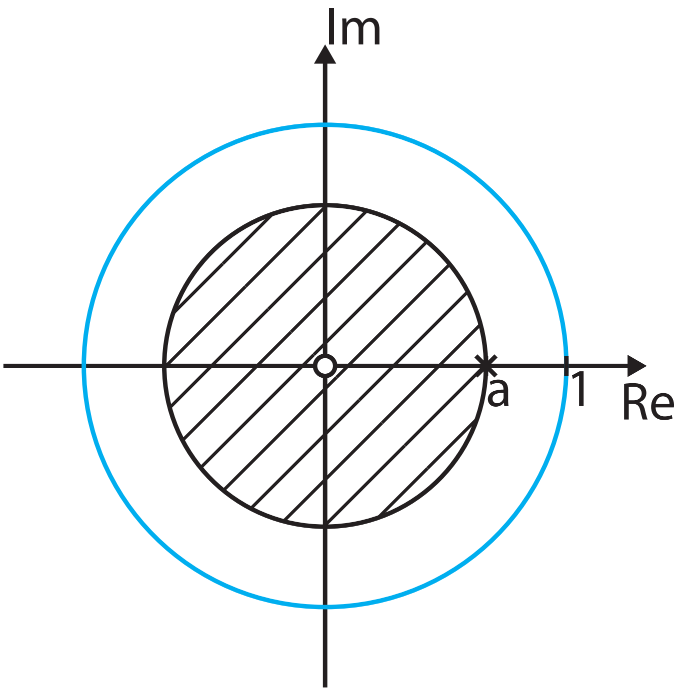

Abbildung 2: Pol-Nullstellen-Diagramm der Folge $x_2[n]$, Schraffierung deutet den Konvergenzbereich an, Kreuze sind Polstellen und Kreise sind Nullstellen

b) Gegeben seien die Folgen

$$x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - (-\frac{1}{4})^n u[-n-1]$$
$$x_4[n] = (-\frac{1}{4})^n u[n] + (\frac{1}{2})^n u[n]$$

Wie sieht jeweils die z-Transformierte und der Konvergenzbereich aus? Benutzen Sie die Ergebnisse aus **a)** und stellen Sie auch z-Transformierte und die dazugehörigen Konvergenzbereiche der Teilfolgen von $x_3[n]$ und $x_4[n]$ dar.

<u>Folge $x_3[n]$:</u> Die z-Transformierte ergibt sich aus den in **a)** gefundenen z-Transformierten und der Linearitätseigenschaft indem man die Teilfolgen identifiziert:

$$x_3[n] = \underbrace{(\frac{1}{2})^n u[n]}_{x_1[n] \text{ mit } a=\frac{1}{2}} \underbrace{-(-\frac{1}{4})^n u[-n-1]}_{x_2[n] \text{ mit } a=(-\frac{1}{4})}$$

Das ergibt für den ersten Term:

$$(\frac{1}{2})^n u[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ mit } |z| > \frac{1}{2}$$

Und für den zweiten Term:

$$(-\frac{1}{4})^n u[-n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \text{ mit } |z| < |(-\frac{1}{4})|$$

Somit erhalten wir für die z-Transformierte:

$$X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Es gibt keinen Überlapp der beiden einzelnen Konvergenzbereiche und somit auch keinen Konvergenzbereich für die gesamte Folge. Hier habe ich mich ein wenig verzettelt und wollte eigentlich das $\frac{1}{2}$ und das $\frac{1}{4}$ vertauscht haben, sodass wir einen Konvergenzbereich zwischen den beiden Polen bei $z = \frac{1}{4}$ und $z = \frac{1}{2}$ gehabt hätten. Ich habe also eher an die Folge gedacht:

$$x_{3,korrekt}[n] = \underbrace{(-\frac{1}{4})^n u[n]}_{x_1[n] \text{ mit } a=-\frac{1}{4}} \underbrace{-(-\frac{1}{2})^n u[-n-1]}_{x_2[n] \text{ mit } a=\frac{1}{2}}$$

Die z-Transformierte hiervon ist mit derselben Begründung wie bei der letzten Folge:

$$X_{3,korrekt}(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ mit } \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$$

Der Konvergenzbereich ergibt sich durch den Überlapp der beiden Teilkonvergenzbereiche: für die rechtsseitige Folge muss $|z| > |-\frac{1}{4}|$ sein und für die linksseitige Teilfolge muss $|z| < \frac{1}{2}$ sein. Wir schreiben die z-Transformierte noch um, damit man die Pol und Nullstellen sofort aus dem Ausdruck sieht:

$$\begin{aligned}
X_{3,korrekt}(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{z}{z} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\frac{z}{z} = \frac{z}{z+\frac{1}{4}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{z(z-\frac{1}{2}) + z(z+\frac{1}{4})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \\
&= \frac{z^2 - \frac{1}{2}z + z^2 + \frac{1}{4}z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \\
&= \frac{2z(z-\frac{1}{8})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass das Polynom Nullstellen bei $z = 0$ und $z = \frac{1}{8}$ hat, sowie Polstellen bei $z = \frac{1}{2}$ und bei $z = -\frac{1}{4}$ Das sich daraus ergebende Pol-Nullstellen-Diagramm findet sich in Abbildung 3.

Folge $x_4[n]$: Die z-Transformierte ergibt sich aus den in **a)** gefundenen z-Transformierten und der Linearitätseigenschaft indem man die Teilfolgen identifiziert:

$$x_4[n] = \underbrace{(\frac{1}{2})^n u[n]}_{x_1[n] \text{ mit } a=\frac{1}{2}} \underbrace{+(-\frac{1}{4})^n u[n]}_{x_1[n] \text{ mit } a=(-\frac{1}{4})}$$

Das ergibt für den ersten Term:

$$(\frac{1}{2})^n u[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \text{ mit } |z| > \frac{1}{2}$$

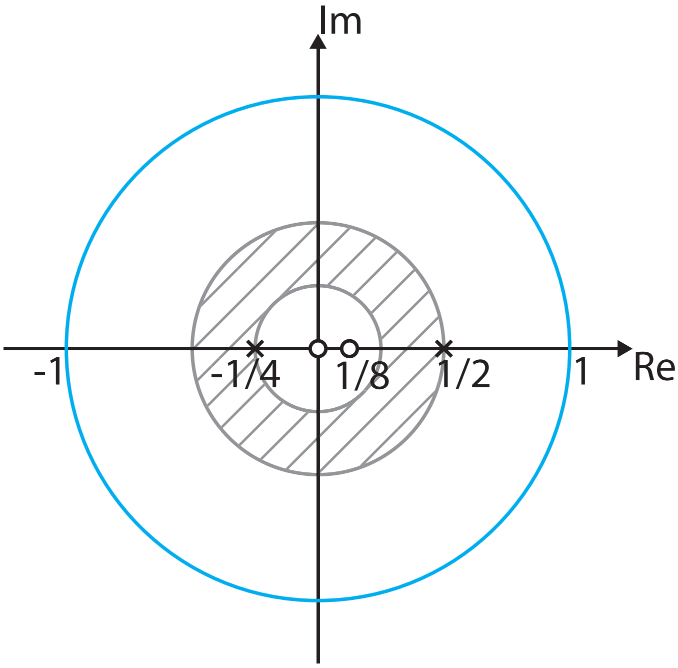

Abbildung 3: Pol-Nullstellen-Diagramm der z-Transformierten $X_{3,korrekt}(z)$, Schraffierung deutet den Konvergenzbereich an, Kreuze sind Polstellen und Kreise sind Nullstellen

Und für den zweiten Term:

$$(-\frac{1}{4})^n u[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \text{ mit } |z| > \frac{1}{4}$$

Somit erhalten wir für die z-Transformierte:

$$X_4(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \text{ mit } |z| > \frac{1}{2}$$

Auch hier ergibt sich der Konvergenzbereich der Gesamtfolge aus der Schnittmenge der Konvergenzbereiche der Teilfolgen. Wie wir sehen ist dies die gleiche z-Transformierte wie $X_3(z)$ nur mit anderem Konvergenzbereich. Somit übernehmen wir die Vereinfachung des Terms:

$$X_3(z) = \frac{2z(z-\frac{1}{8})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}$$

Das Pol-Nullstellen-Diagramm findet sich in Abbildung 4.

3 Eigenschaften des Konvergenzbereichs

Betrachten Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm einer z-Transformierten $X(z)$, welches in Abbildung 5 dargestellt ist.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich von $X(z)$, wenn bekannt ist, dass die Fourier-Transformierte existiert. Ermitteln Sie für diesen Fall, ob die entsprechende Folge $x[n]$ rechtsseitig, linksseitig oder zweiseitig ist.

Wenn die Fourier-Transformierte existieren soll, so muss das System stabil sein. Das heißt der Konvergenzbereich muss den Einheitskreis umschließen. Die einzige Möglichkeit hierfür ist ein Konvergenzbereich der durch $\frac{1}{3} < |z| < 2$ beschrieben ist. Da es sich hierbei um einen von zwei Polen

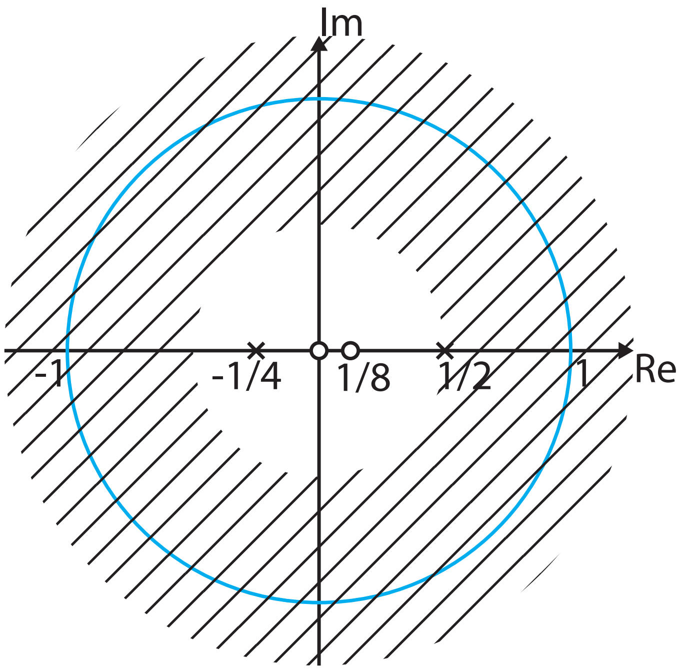

Abbildung 4: Pol-Nullstellen-Diagramm der z-Transformierten $X_4(z)$, Schraffierung deutet den Konvergenzbereich an, Kreuze sind Polstellen und Kreise sind Nullstellen

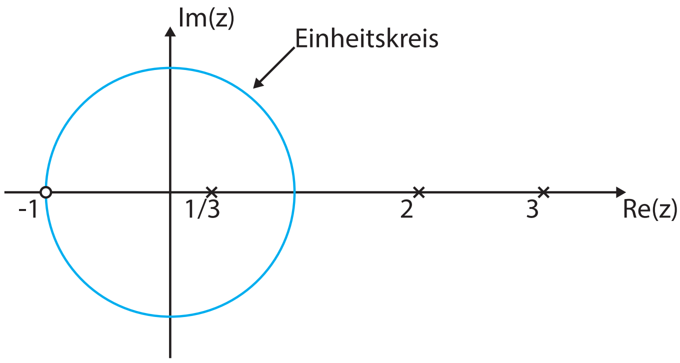

Abbildung 5: Pol-Nullstellen-Diagramm einer z-Transformierten, Kreuze sind Polstellen, Kreise sind Nullstellen

begrenzten Konvergenzbereich handelt muss es sich um eine zweiseitige Folge handeln.

b) Wie viele mögliche zweiseitige Folgen entsprechen dem Pol-Nullstellen-Diagramm?

Zwei: $\frac{1}{3} < |z| < 2$ und $2 < |z| < 3$, da sonst keine weiteren Polstellen vorhanden sind.

c) Kann das Pol-Nullstellen-Diagramm mit einer Folge assoziiert werden, die sowohl stabil als auch kausal ist? Wenn ja, geben Sie den dazugehörigen Konvergenzbereich an.

Wenn das System stabil sein soll, so muss die Fouriertransformierte existieren und somit der Konvergenzbereich den Einheitskreis einschliessen. Dies ist wie in Aufgabe 1 festgestellt, allerdings nur für eine zweiseitige Folge möglich, die somit nicht kausal sein kann. Der Einzige zu einer kausalen Folge gehörige Konvergenzbereich wäre $|z| > 3$.