Einführung in die digitale Signalverarbeitung - Übung (3135 L 372) - WS09/10
FG Audiokommunikation, Institut für Sprache und Kommunikation, TU Berlin
Prof. S. Weinzierl, Frank Schultz, Teresa Kunz

Übung 6, 17.12.2009: Analyse und Interpretation von LTI-Systemen - Pole, Nullstellen, Amplitudengang, Phasengang, Gruppenlaufzeit, Impulsantwort

Musterlösung[1]

1 Aufgabe:

Gegeben ist die Differenzengleichung für rechtsseitige relle Eingangs- und Ausgangssignale

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right) \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

mit $n \in \mathbb{Z}$.

1.1

Bestimmen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion H(z).
Lösung:
Wegen

$$\delta[n-m] \circ\!\!-\!\!\bullet\, z^{-m}$$

und der Forderung rechtsseitiger Signale kann die Z-Transfomierte der Differenzengleichung direkt aufgeschrieben und in Form von H(z) gebracht werden.

$$Y(z) = \frac{1}{2}\left(X(z) + X(z) \cdot z^{-1}\right) = X(z) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right)$$

1.2

Bestimmen Sie Pole und Nullstellen von H(z) und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellendiagramm.
Lösung:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+1}{z}\right)$$

$$z_N = -1 \qquad z_P = 0$$

Diagramm siehe Abb. 1 Das Pol-Nullstellendiagramm ist für den erfahrenen Signalverarbeiter

[1] Frank Schultz, 17. Dezember 2009, 16:50

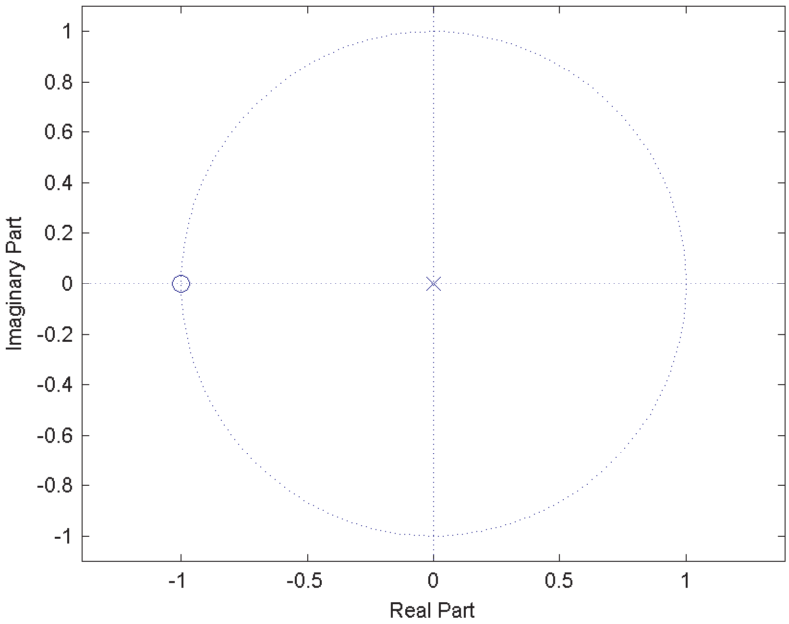

Abbildung 1: Pol-Nullstellendiagramm

ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Analyse von Systemen, allerdings, wenn man sich in die Materie neu reindenkt evtl. noch sehr unanschaulich. Daher könnte ein erweitertes Pol-Nullstellendiagramm hilfreich sein, in dem die ganze Z-Ebene (Real- und Imaginärteile der komplexen Zahl z) als Isobarenplot den dB-Betrag von $H(z)$ farbig codiert darstellt, wie in Abb. 2,3,4. Wenn man nun den oberen Halbkreis von $z = 1$ bis $z = -1$ in Abb. 4 durchläuft, erhält man eine ziemlich konkrete Vorstellung über das Amplitudenverhalten von H(z) bei den unterschiedlichen Frequenzen, vor allem die Dämpfung um abgelesene 3dB bei $z = \mathrm{j}$ (entspricht $f_s/4$) sollte man für Nachfolgendes im Kopf behalten...

1.3

Bestimmen Sie analytisch den Amplitudenfrequenzgang $|H(z)|$ und stellen Sie diesen grafisch dar.
Lösung:
Auswertung der Z-Transformierten auf dem Einheitskreis ergibt den Amplitudenfrequenzgang.

$$z = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}$$

DTFT vs. Z-Transformation:

$$H(\Omega) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega\,n}$$

$$H(z) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\,z^{-n} \underbrace{=}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega}} H(\Omega)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}\,\left(1 + z^{-1}\right)$$

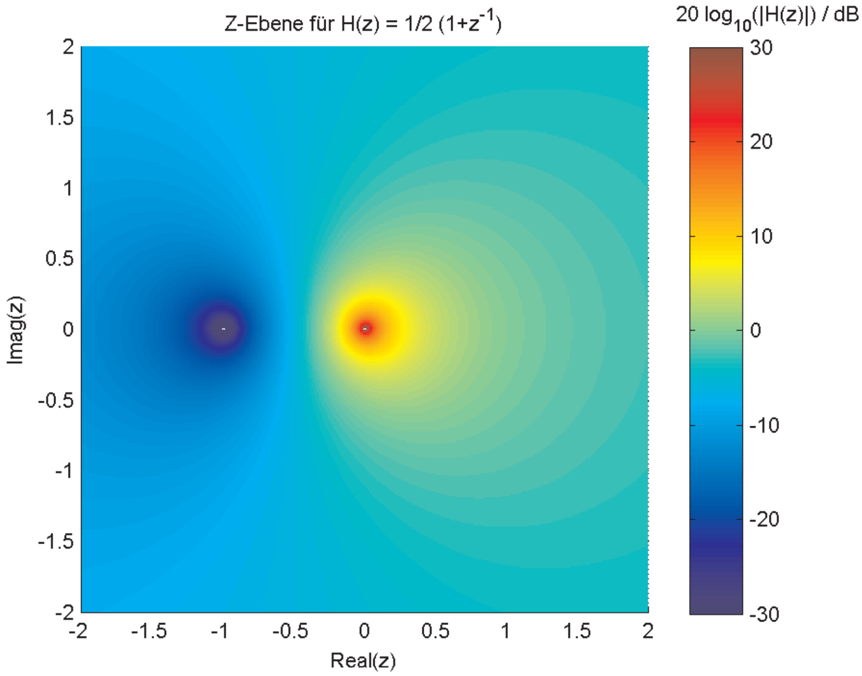

Abbildung 2: Z-Ebene

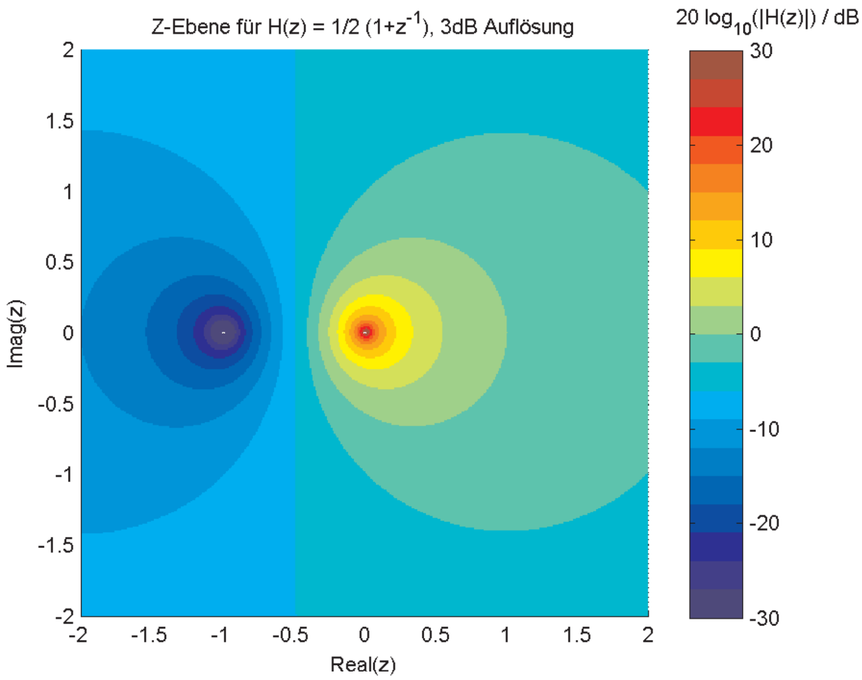

Abbildung 3: Z-Ebene

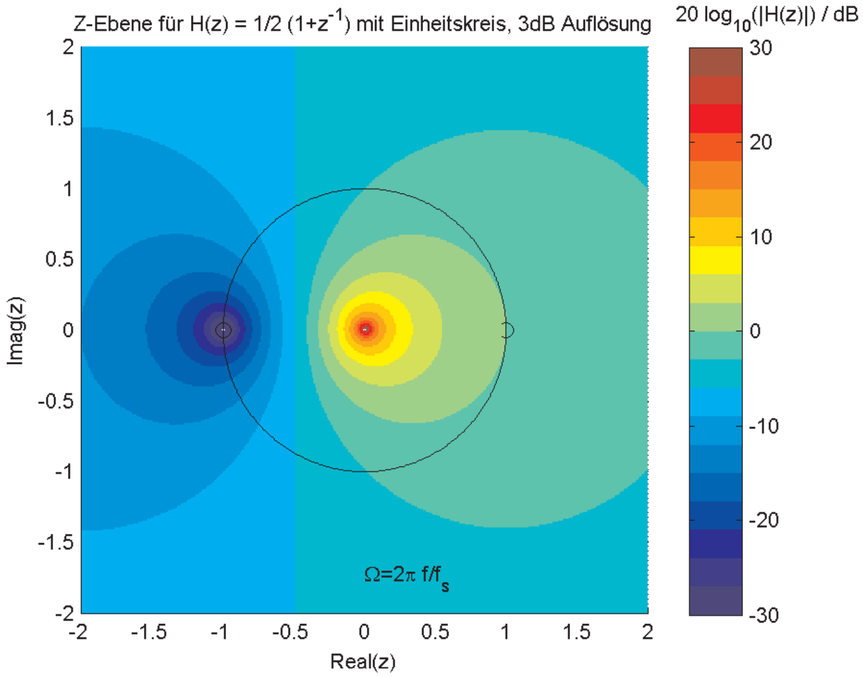

Abbildung 4: Z-Ebene

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}\right)$$

Eulersche Identität:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{j}\,\sin(\phi) \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi} = \cos(\phi) - \mathrm{j}\,\sin(\phi)$$

und daraus folgend:

$$\cos(\phi) = \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\phi}}{2\,\mathrm{j}}$$

Angewandt auf unsere Problemstellung folgt für die DTFT:

$$H(\Omega) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(\Omega) - \mathrm{j}\,\sin(\Omega))$$

Real- und Imaginärteil trennen:

$$\Re\,(H(\Omega)) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(\Omega))$$

$$\Im\,(H(\Omega)) = \frac{1}{2}\,(-\sin(\Omega))$$

Betrag der komplexen Zahl anwenden:

$$|H(\Omega)|^2 = \Re\,(H(\Omega))^2 + \Im\,(H(\Omega))^2$$

$$|H(\Omega)|^2 = \left[\frac{1}{2}\,(1+\cos(\Omega))\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\,(-\sin(\Omega))\right]^2$$

binomische Formel anwenden:

$$|H(\Omega)|^2 = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\,\cos(\Omega) + \frac{1}{4}\,\cos^2(\Omega)}_{\Re(H(\Omega))^2} + \underbrace{\frac{1}{4}\,\sin^2(\Omega)}_{\Im(H(\Omega))^2}$$

Vereinfachung mittels trigonometrischen Pythagoras':

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\,\cos(\Omega) + \underbrace{\frac{1}{4}\,\cos^2(\Omega) + \frac{1}{4}\,\sin^2(\Omega)}_{1/4}$$

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\cos(\Omega) = \frac{1}{2}\,\cos(\Omega) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(\cos(\Omega)+1)$$

Vereinfachung mittels Cosinus-Euleridentität:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{2}\,\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega} + 2\right)$$

und einer Erweiterung mit dem Ziel der Darstellung als binomische Formel:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4}\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega\cdot\frac{2}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega\cdot\frac{2}{2}} + 2\cdot\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}\right)$$

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4}\,\left(\left[\underbrace{\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{j}\,\Omega}{2}}}_{a}\right]^2 + \left[\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\,\Omega}{2}}}_{b}\right]^2 + 2\cdot\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}\right)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4}\,\left(e^{+\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}} + e^{-\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}\right)^2$$

$$|H(\Omega)|^2 = \left(\frac{e^{+\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}} + e^{-\mathrm{j}\,\frac{\Omega}{2}}}{2}\right)^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

Reelles Spektrum erfordert Betrag des Cosinus:

$$\underline{\underline{|H(\Omega)| = |\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)|}}$$

Grafische Darstellung in Abb. 5. Für $\Omega = \pi/2$ erhält man $|H(\Omega)| = |\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$. Dies ergibt $20\log_{10}(|H(\Omega)|) \approx -3.01$dB, wie auch schon aus Abb. 4 geschätzt zu entnehmen war. Für $\Omega = \pi$ erhält man $|H(\Omega)| = |\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)| = 0$. Dies ergibt $20\log_{10}(|H(\Omega)|) = -\infty$dB, hier macht sich die direkt auf dem Einheitskreis sitzende Nullstelle in ihrer vollen Wirkung - nämlich komplette Auslöschung des Signals - bemerkbar. Allgemein kann man dem System H(z) einfache Tiefpasscharakteristik zuschreiben.

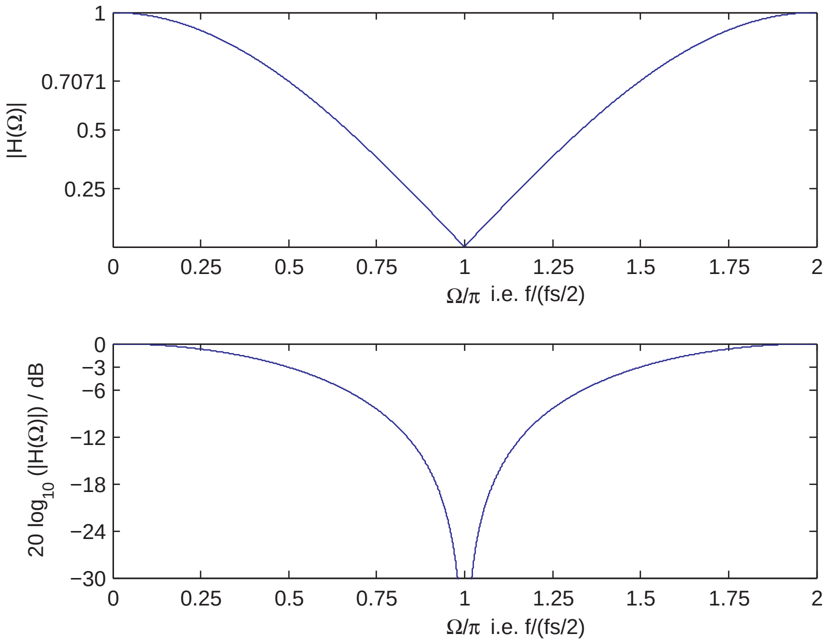

Abbildung 5: Amplitudenfrequenzgang für H(Ω)

1.4

Bestimmen Sie analytisch den Phasenfrequenzgang $\angle H(\Omega)$ und den Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ und stellen Sie diese grafisch dar.

Lösung:

Definition Phase:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\frac{\Im\left(H(\Omega)\right)}{\Re\left(H(\Omega)\right)}\right)$$

Einsetzen, wobei hier oben gemachte Erkenntnisse bzgl. Cosinus-Additionstheoremen benutzt werden:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\,(-\sin(\Omega))}{\frac{1}{2}\,(1+\cos(\Omega))}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\,\sin(\Omega)}{\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)$$

Schauen wir uns das Argument der arctan-Funktion, im folgenden x, mit dem Ziel der Vereinfachung genauer an:

$$x = \frac{-\frac{1}{2}\,\sin(\Omega)}{\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \qquad \angle H(\Omega) = \arctan(x)$$

Zunächst wieder Sinus- und Cosinusidentitäten einsetzen und kürzen:

$$x = \frac{-\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{j}}}{\frac{1}{4}\,\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^2} = \frac{-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{j}}}{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^2}$$

Danach so erweitern, dass eine Cosinus-Funktion geschrieben werden kann:

$$x = \frac{-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{j}}}{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^{-1}}{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^{-1}} = \frac{-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{j}}}{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)} \cdot \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^{-1}$$

Umformen und Umstellen, so dass der erste Bruch nicht mehr 'angefasst' wird:

$$x = \frac{-\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{j}}}{2\,\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\Omega/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)^{-1}$$

$$x = \frac{-1}{2\,\mathrm{j}\;\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}}$$

Jetzt mit der Intention im Zähler irgendwie eine reine Sinus-Funktion über Euler zu erhalten, erweitern:

$$x = \frac{-1}{2\,\mathrm{j}\;\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}}$$

$$x = \frac{-1}{2\,\mathrm{j}\;\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}}$$

Anwenden dieser binomischen Formel, zu finden im Nenner,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

vereinfacht gewaltig:

$$x = \frac{-1}{2\,\mathrm{j}\;\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega/2}\right)$$

und bringt schlußendlich ein einfaches Ergebnis zu Tage (Punktsymmetrie des Tangens beachten $\tan(x) = \tan(-x)$):

$$x = -\frac{\sin(\frac{\Omega}{2})}{\cos(\frac{\Omega}{2})} = -\tan(\frac{\Omega}{2}) = \tan(-\frac{\Omega}{2})$$

Nun wieder vom Ursprung der Rechnung $\angle H(\Omega) = \arctan(x)$ ausgehend:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\tan(-\frac{\Omega}{2})\right)$$

Da sich die Funktionen $\tan(x)$ und $\arctan(x)$ nur zwischen $-\pi/2 < x < +\pi/2$ bijektiv verhalten, d.h. dort exakte Umkehrfunktionen exisiteren und damit $x = \tan(\arctan(x))$ und $x = \arctan(\tan(x))$ gilt, muss bei der allgemeinen Diskussion und Vereinfachung der Phase eine Fallunterscheidung erfolgen. D.h. falls für das Argument $-\pi/2 < \Omega/2 < \pi/2$ und damit $-\pi < \Omega < \pi$ gilt, kann zunächst einfach geschrieben werden

$$\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \qquad -\pi < \Omega < +\pi$$

Für $\Omega = \pm\pi$ und deren $2\,\pi$-periodischen Fortsetzungen entstehen allerdings Sprungstellen im Phasenverlauf, die nach Quadranten-, Werte- und Definitionsüberlegungen (atan2(x,y)) bzgl. der trigonometrischen Funktionen in folgende Gleichung münden:

$$\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \pm k\,\pi \qquad (2\,k-1)\,\pi \leq \Omega < (2\,k+1)\,\pi$$

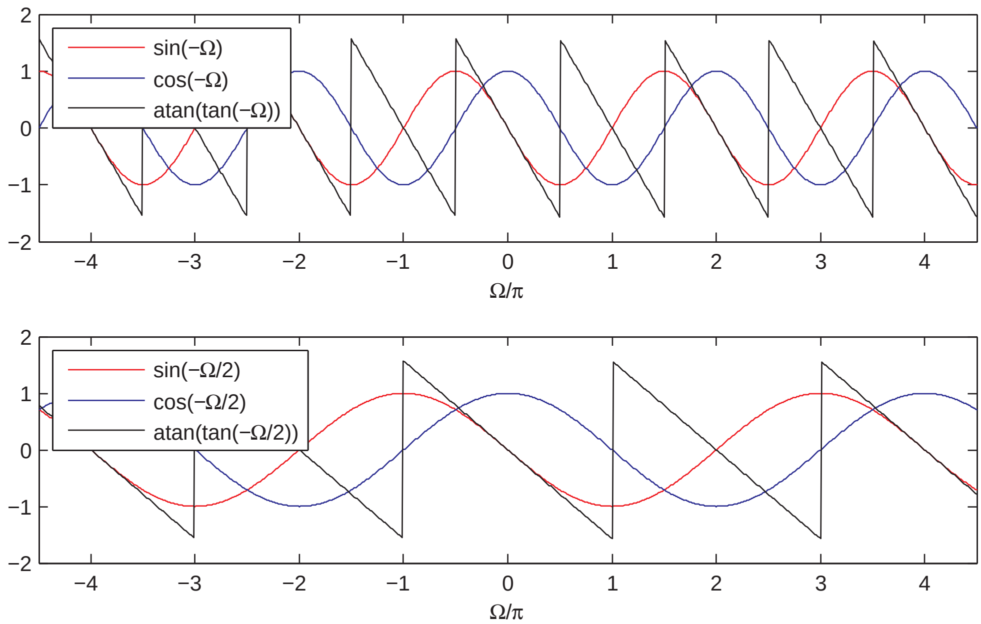

Abbildung 6:

Definition Gruppenlaufzeit:

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\angle H(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

Wir wählen zur einfacheren Vorstellung den physikalischen Bezug zur Samplingfrequenz:

$$\Omega = 2\,\pi\,\frac{f}{f_s} = \frac{\omega}{f_s}$$

Ergibt:

$$\angle H(\omega) = -\frac{\omega}{2\,f_s}$$

Einsetzen und Differentation ausführen (außer bei Unstetigkeiten):

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{\omega}{2\,f_s}\right)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2\,f_s}$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{\tau = \frac{T_s}{2}}} \qquad (2\,k-1)\,\pi \leq \Omega < (2\,k+1)\,\pi$$

Die Gruppenlaufzeit ist konstant und positiv über die Frequenz (außer bei Unstetigkeiten bei Phasensprungstellen), dies ergibt sich aus der negativen Ableitung (Anstieg) eines linearen Phasenverlaufs. Die Gruppenlaufzeit beträgt $1/2$ Sample (für f_s=48000 Hz wären dies ca. 10μs) für alle Frequenzgruppen. Abb. 7 zeigt Phase und Gruppenlaufzeit, der Phasensprung bei $\Omega = \pi$ bewirkt die Unstetigkeit in der Gruppenlaufzeit, die an dieser Stellen nicht definiert und daher mit einem Punkt markiert ist.

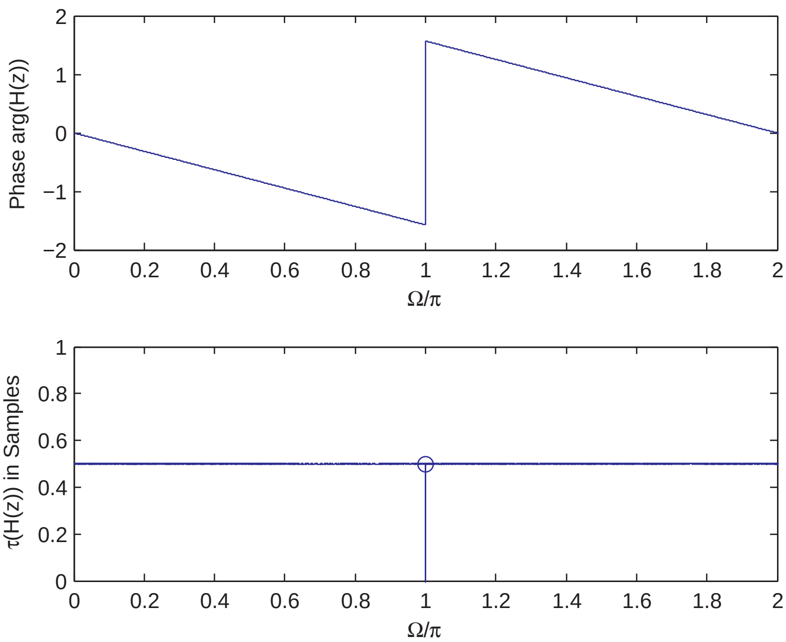

Abbildung 7: Phasen- und Gruppenlaufzeitfrequenzgang für H(Ω)