Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 7. Aufgabenblatt

z-Transformation und Übertragungsfunktion

1. Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0{,}25z^{-1} - 0{,}375z^{-2}}$$

1.1. Ermitteln Sie die Impulsantwort h[n].

Benutzen Sie dafür folgenden Ausschnitt aus der Tabelle bekannter Paare bei der z-Transformation.

h□=□□□ □□=□□□−□ □>□

Für welche n konvergiert die Impulsantwort gegen 0?

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}}$$

Polstellen durch Einsetzen des Nenners in die pq-Formel:

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}}$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{8} \pm \frac{5}{8}$$

$$z_1 = \frac{3}{4}, \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

Partialbruchzerlegung:

$$H(z) = \frac{z}{\left(z-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)} = z\cdot\left(\frac{A}{\left(z-\frac{3}{4}\right)} + \frac{B}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{\left(z-\frac{3}{4}\right)} + \frac{B}{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\left(z-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

Bilden des Hauptnenners:

$$\frac{A\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)+B\cdot\left(z-\frac{3}{4}\right)}{\left(z-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\left(z-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

$$A\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)+B\cdot\left(z-\frac{3}{4}\right)=1$$

Einsetzen der Polstellen z_1 und z_2: Je ein Summand wird 0

$$A\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+B\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)=1$$

$$A\cdot\left(\frac{10}{8}\right) \quad +B\cdot 0 \qquad =1$$

$$A=\frac{4}{5}$$

$$A\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+B\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)=1$$

$$A\cdot 0 \qquad +B\cdot\left(-\frac{10}{8}\right) \quad =1$$

$$B=-\frac{4}{5}$$

Einsetzen in die Gleichung:

$$H(z) = z \cdot \left(\frac{A}{\left(z - \frac{3}{4}\right)} + \frac{B}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} \right) = \frac{\frac{4}{5} \cdot z}{\left(z - \frac{3}{4}\right)} - \frac{\frac{4}{5} \cdot z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)}$$

$$h[n] = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n > 0$$

1.2. Plotten Sie mit Matlab die Impulsantwort für $0<n<20$.

Siehe Matlab-File Uebung5_Aufgabe1_2.m

1.3. Stellen Sie Betrag- und Phasenfrequenzgang des Systems dar.
Matlabbefehl: *freqz*

Siehe Matlab-File Uebung5_Aufgabe1_3.m

2. Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0{,}5z^{-1}}$$

2.1. Stellen Sie die Z-Transformierte mit Hilfe der Polynomdivision dar als Potenzreihe in der Form $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$$H(z) = \frac{z - 1}{z + \frac{1}{2}}$$

$$(z - 1) : (z + \frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{2} z^{-1} + \frac{3}{4} z^{-2} - \frac{3}{8} z^{-3}$$

2.2. Lesen Sie die ersten 5 Werte der Impulsantwort h[n] ab und skizzieren Sie ihren Verlauf.

$$h[0] = 1$$

$$h[1] = -\frac{3}{2}$$

$$h[2] = +\frac{3}{4}$$

$$h[3] = -\frac{3}{8}$$

$$h[4] = +\frac{3}{16}$$

$$h[5] = -\frac{3}{32}$$

2.3. Bilden Sie die Differenzengleichung des Systems y[n] und überprüfen Sie die Werte aus 2.2.,indem Sie die Systemantwort auf einen Impuls δ[n] iterativ bestimmen.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) \cdot \left(1 + 0,5z^{-1}\right) = X(z) \cdot \left(1 - z^{-1}\right)$$

$$Y(z) + 0,5 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) - X(z) \cdot z^{-1}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] - \frac{1}{2} y[n-1]$$

Durch Einsetzten des Einheitsimpulses für x[n] bei Annahme von y[n-1]=0 erhält man die gleichen Werte wie bei 2.2.

2.4. Wie könnte man die Impulsantwort in Matlab nachbilden?

Siehe Matlab-File Uebung5_Aufgabe2_4.m