Einführung in die Digitale Verarbeitung WS10/11

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 7. Aufgabenblatt

z-Transformation und Übertragungsfunktion/Inverse z-Transformation

1. Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.25z^{-1}-0.375z^{-2}}$$

1.1 Ermitteln Sie die Impulsantwort. Benutzen Sie folgenden Ausschnitt aus der Tabelle bekannter Paare der z-Transformation:

$$h[n]=k\cdot\alpha^{n}\Leftrightarrow H(z)=\frac{kz}{z-\alpha}\quad |z|>\alpha \quad (1)$$

Für welche n konvergiert die Impulsantwort gegen null?

Lösung:

Die Übertragungsfunktion soll in eine solche Form gebracht werden, dass die Paare der z-Transformation benutzt werden können. Es ist ersichtlich, dass, durch die Ermittlung der Würzeln für den Nenner, der letztere faktorisiert werden kann, und dadurch kann das Transformationspaar in (1) eingesetzt werden.

Nach der Faktorisierung gilt für die Übertragungsfunktion:

$$H(z)=\frac{z}{(z-\frac{3}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

Und sie kann durch Partialbruchzerlegung so umgesetzt werden:

$$H(z)=\frac{\frac{4}{5}z}{(z-\frac{3}{4})}-\frac{\frac{4}{5}z}{(z+\frac{1}{2})}$$

Aus der letzten Gleichung mithilfe der inversen z-Transformation bekommt man:

$$h[n]=\frac{4}{5}(\frac{3}{4})^n-\frac{4}{5}(-\frac{1}{2})^n, \qquad n>0$$

1.2 Plotten Sie mit Matlab die Impulsantwort für 0<n<20.

Siehe Matlab File “Uebung7_Aufgabe1_2.m”

1.3 Stellen Sie Betrag- und Phasenfrequenzgang des Systems dar. Matlab-befehl: *freqz*

Siehe Matlab File “Uebung7_Aufgabe1_3.m”

2. Gegeben sei ein System mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$$

2.1 Stellen Sie die z-Transformierte mithilfe der Polynomdivision dar als Potenzreihe in der Form:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]\cdot z^{-n}$$

Lösung:

Beim Multiplizieren von beiden Teilen des Bruches mit dem Inversen der größten Potenz, die im Übertragungsfunktion auftritt (in dem Fall ist das z^{-1}) erhält man:

$$H(z)=\frac{z-1}{z+0.5}$$

Jetzt ist die Polynomdivision $z-1:z+0.5$ durchzuführen. Allgemein gilt für Polynome P (Divident) und Q (Divisor), dass es zwei andere Polynome S und R existieren, sodass: P = QS + R. Das Polynom R (Rest) hat immer einen kleineren Grad als das Polynom S.

Die Denkweise hier ist, dass wenn die Übertragungsfunktion in der Form eines Polynoms mit gewichteten Potenzen von z gebracht worden ist, kann sie direkt zu einer Summe von (verschobenen und gewichteten) Delta-Impulsen zurück z-transformiert werden.

Die Polynomdivision im diesen Fall läuft wie folgt: Am ersten Schritt, es ist herausgefunden, wie oft der Summand mit der größten Potenz vom Divisor, in den Summand mit der größten Potenz des Dividenten passt. Hier sind das *z* und *z*, es ist also das Ergebnis ***1***. Das letztere ist geschrieben unter dem Divisor, und das Produkt vom Ergebnis und Divisor ist abgezogen aus dem Dividenten. Der Schritt ist geschildert hierunten.

$$
\begin{array}{l|l}
z - 1 & z+0.5 \\
\hline
-(z + 0.5) & 1 \\
\hline
0 - 1.5 &
\end{array}
$$

Theoretisch könnte man schon nach diesem Schritt aufhören. Allerdings erfüllt dies erstens nicht das Ziel, da sich keine höhere Potenzen (außer die 0-Potenz) bei dem Ergebnis aufgetaucht sind. Zweitens, es ist schon merkbar, dass die Polynomdivision eigentlich bis zu unendlich weitergemacht werden kann. Beim Wiederholen der Prozedur bei Schritt I, ergeben sich folgende Schritte:

$$
\begin{array}{l|l}
z - 1 & z+0.5 \\
\hline
-(z + 0.5) & 1 - (3/2)z^{-1} + (3/4)z^{-2} - (3/8)z^{-3} + (3/16)z^{-4} \\
\hline
0 - 3/2 & \\
-(-(3/2)-(3/4)z^{-1}) & \\
\hline
0 + (3/4)z^{-1} & \\
-(+(3/4)z^{-1}+(3/8)z^{-2}) & \\
\hline
0 - (3/8)z^{-2} & \\
-(-(3/8)z^{-2}-(3/16)z^{-3}) & \\
\hline
0 + (3/16)z^{-3} & \\
-(+(3/16)z^{-3} + (3/32)z^{-4}) & \\
\hline
0 - (3/32)z^{-4} &
\end{array}
$$

Wie erwähnt, die Division könnte weitereführt werden, um eine unendliche Anzahl von Polynomterme im Ergebnis (Blaues Polynom) zu bekommen. Da das aber kaum praktisch und zielführend ist, beschränkt sich man an die ersten N Terme, indem man merkt, dass der nach N Schritte resultierende Rest so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann. In dem Fall wurde $N = 5$ gewählt, mit entsprechendem Rest $-3/(32z)$ (im Gelben).

Für den Quotient (das Ergebnis der Division) ist folgendes zu merken: Es ist ein Polynom mit Termen, die alternierendes Vorzeichen haben (zwar die Terme von ungerader Potenz von z haben negatives Vorzeichen und umgekehrt), und die Koeffizienten von z sind der Form $(\frac{3}{2^n})$. So kann man eigentlich die nächste Terme voraussagen, was in der Formel

$$H(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{3}{2^n})z^{-n}$$

zusammengefasst werden kann. Für die Aufgabe kann es unter der Annahmen geschrieben werden:

$$H(z)=1-(\frac{3}{2})z^{-1}+(\frac{3}{4})z^{-2}-(\frac{3}{8})z^{-3}+(\frac{3}{16})z^{-4}$$

2.2 Lesen Sie die erste fünf Werte der Impulsantwort $h[n]$ und skizzieren Sie ihren Verlauf.

Aus 2.1 und der Kentnis des Transformationspaares $h[n]=\delta[n-n_0] \Leftrightarrow H(z)=z^{-n_0}$ können wir direkt die Impulsantwort ablesen:

$$h[n]=\delta[n]-\frac{3}{2}\cdot\delta[n-1]+\frac{3}{4}\cdot\delta[n-2]-\frac{3}{8}\cdot\delta[n-3]+\frac{3}{16}\cdot\delta[n-4]$$

Die erste fünf Werte davon sind (wir fangen an mit n=0):

$$\begin{aligned}
h[0]&=\delta[0]-\frac{3}{2}\cdot\delta[-1]+\frac{3}{4}\cdot\delta[-2]-\frac{3}{8}\cdot\delta[-3]+\frac{3}{16}\cdot\delta[-4]=1\\
h[1]&=\delta[1]-\frac{3}{2}\cdot\delta[0]+\frac{3}{4}\cdot\delta[-1]-\frac{3}{8}\cdot\delta[-2]+\frac{3}{16}\cdot\delta[-3]=\frac{-3}{2}\\
h[2]&=\delta[2]-\frac{3}{2}\cdot\delta[1]+\frac{3}{4}\cdot\delta[0]-\frac{3}{8}\cdot\delta[-1]+\frac{3}{16}\cdot\delta[-2]=\frac{+3}{4}\\
h[3]&=\delta[3]-\frac{3}{2}\cdot\delta[2]+\frac{3}{4}\cdot\delta[1]-\frac{3}{8}\cdot\delta[0]+\frac{3}{16}\cdot\delta[-1]=\frac{-3}{8}\\
h[4]&=\delta[4]-\frac{3}{2}\cdot\delta[3]+\frac{3}{4}\cdot\delta[2]-\frac{3}{8}\cdot\delta[1]+\frac{3}{16}\cdot\delta[0]=\frac{+3}{16}
\end{aligned}$$

2.3 Bilden Sie die Differenzengleichung des Systems $y[n]$ und überprufen Sie die Werte aus 2.2, indem Sie die Systemantwort am einen Impuls $\delta[n]$ iterativ bestimmen.

Um die Diffenenzengleichung zu bilden fängt man von der Übertragungsfunktion an:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1+0.5\mathrm{z}^{-1}}\Rightarrow Y(z)\cdot(1+0.5\mathrm{z}^{-1})=X(z)\cdot(1-z^{-1})$$

$$Y(z)=X(z)-X(z)\cdot z^{-1}-Y(z)\cdot 0.5\mathrm{z}^{-1}\Rightarrow y[n]=x[n]-x[n-1]-\frac{1}{2}y[n-1]$$

Wenn man als Eingang den Impuls $\delta[n]$ benutzt wird der Ausgang die Impulsantwort $h[n]$ des Systems sein. Wenn man die Werte einsetzt bekommt man (vorausgesetzt, das System hat keine gespeicherte Ausgangswerte, also es gilt h[-1] = 0). Die Werte gleichen denen aus **2.2**

$$\begin{aligned}
h[0]&=\delta[0]-\delta[-1]-\frac{1}{2}h[-1]=1\\
h[1]&=\delta[1]-\delta[0]-\frac{1}{2}h[0]=-1-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{-3}{2}\\
h[2]&=\delta[2]-\delta[1]-\frac{1}{2}h[1]=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})=\frac{3}{4}\\
h[3]&=\delta[3]-\delta[2]-\frac{1}{2}h[2]=-\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4})=-\frac{3}{8}\\
h[4]&=\delta[4]-\delta[3]-\frac{1}{2}h[3]=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{8})=\frac{3}{16}
\end{aligned}$$

2.4 Wie konnte man die Impulsantwort in Matlab nachbilden?

Siehe Matlab File “Uebung7_Aufgabe2_4.m”