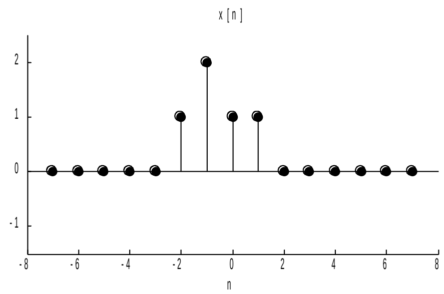
Einführung in die digitale Signalverarbeitung

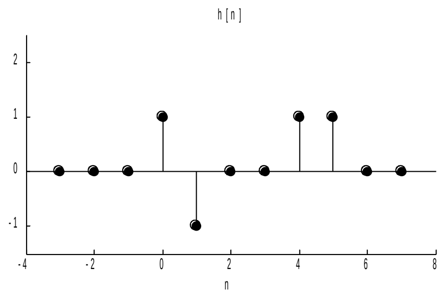
Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 2. Aufgabenblatt

1. Faltung und Impulsantwort

1.1 Gegeben seien ein Eingangssignal x[n] und eine Impulsantwort h[n] eines diskreten Systems:





Berechnen und skizzieren Sie das Faltungsprodukt y[n] = x[n] ∗ h[n]

Ausgehend vom Faltungsprodukt

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

betrachten wir zu jedem Zeitpunkt n das Signal x(n-k) und die Impulsantwort h(k), berechnen das Produkt der beiden Signale und summieren über alle Zeitpunkte k.

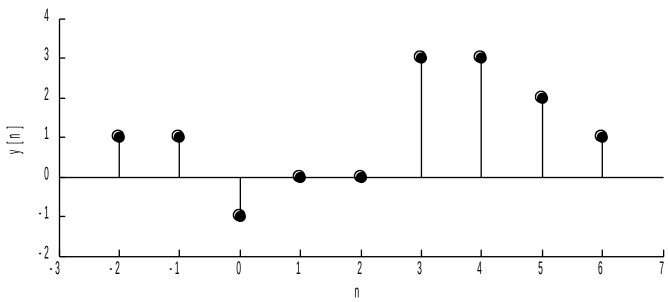
Zum Zeitpunkt n = -3 betrachten wir h(k) und x(-3-k).
Es ergibt sich y(-3) = 0.

Zum Zeitpunkt n = -2 betrachten wir h(k) und x(-2-k).
Es ergibt sich y(-2) = 1*1 = 1.

Zum Zeitpunkt n = -1 betrachten wir h(k) und x(-1-k).
Es ergibt sich y(-2) = 2*1 + 1*(-1) = 1.

usw.

Ergebnis:



1.2 Programmieren Sie in Matlab mithilfe der Funktion `filter` eine neue Funktion mit folgenden Eigenschaften: Die Funktion soll ein beliebiges Eingangsignal x[n] und eine beliebige Impulsantwort h[n] entgegennehmen und das Ergebnis der Faltung als y[n] zurückgeben. Der Aufruf soll beispielsweise so erfolgen: y = FIR(x,h).

1.3 Geben sie die oben gezeigte Funktion ein und vergleichen Sie das Ergebnis mit den „von Hand“ berechneten Werten aus 1.1.

siehe Matlab-Files „Uebung2_Aufgabe1.m“ und „meinFIR.m“

2. Gleitender Mittelwert

Der gleitende Mittelwert sei ein zeitdiskretes System mit der Differenzengleichung

$$y[n] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=n-1}^{n+1} x[k]$$

a. Zeichnen Sie das Eingangssignal x[n] = [1,2,1,-1,-1,2,2,1,-1] für n = 0…8 in Matlab mit der Funktion `stem`

siehe Matlab-File „Uebung2_Aufgabe2.m“

b. Berechnen Sie durch Iteration das Ausgangssignal y[n] und zeichnen Sie es wie oben für n = -2…10

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y[n]	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0

c. Untersuchen Sie das System hinsichtlich

- Kausalität
- Linearität
- Zeitinvarianz

Das System ist linear, zeitinvariant und nicht kausal.

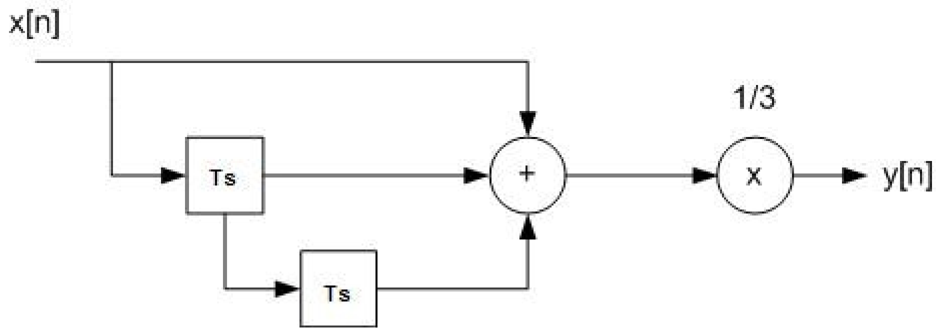
d. Ändern Sie die Differenzengleichung des Systems so, dass der gleitende Mittelwert kausal wird und zeichnen Sie einen Signalflussgraphen für das geänderte System.

Um ein kausales System zu erhalten, ändern wir die Differenzengleichung derart, dass kein Term auftritt, der einen zukünftigen Abtastwert enthält. Die Differenzengleichung müsste demnach lauten:

$y[n] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=n-2}^{n} x[k]$, bzw. ausgeschrieben:

$y[n] = \frac{1}{3} \cdot \left(x[n-2] + x[n-1] + x[n] \right)$

Der Signalflussgraph ergibt sich folgendermaßen:



e. Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.

Um die Impulsantwort zu bestimmen, untersuchen wir die Antwort des Systems aus Teilaufgabe d. auf einen Diracimpuls:

$$h(-1) = \frac{1}{3}(\delta(-1) + \delta(-2) + \delta(-3)) = 0$$

$$h(0) = \frac{1}{3}(\delta(0) + \delta(-1) + \delta(-2)) = \frac{1}{3}$$

$$h(1) = \frac{1}{3}(\delta(1) + \delta(0) + \delta(-1)) = \frac{1}{3}$$

$$h(2) = \frac{1}{3}(\delta(2) + \delta(1) + \delta(0)) = \frac{1}{3}$$

$$h(3) = \frac{1}{3}(\delta(3) + \delta(2) + \delta(1)) = 0$$

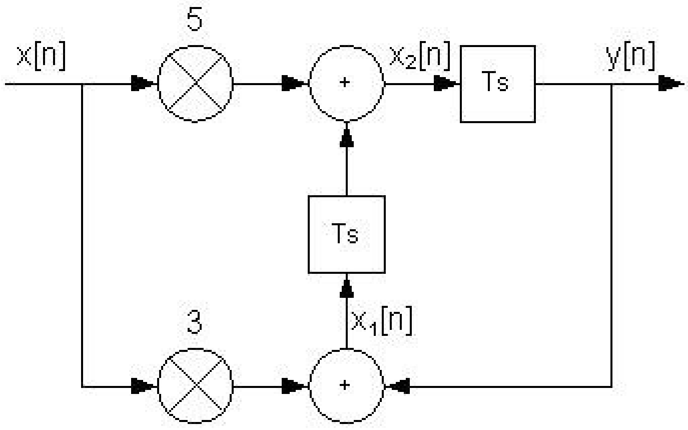
f. Programmieren Sie in Matlab eine Funktion *mittelwert*, die das obige System nachbildet. Die Funktion soll für einen beliebigen Vektor den gleitenden Mittelwert über drei Werte berechnen. Zusätzlich soll ein Zeitvektor ausgegeben werden, der die zugehörigen Abtastzeitpunkte enthält.

g. Überprüfen Sie, ob Ihre Funktion *mittelwert* für das Eingangssignal x[k] aus a. das in b. berechnete Ergebnis liefert.

siehe Matlab-File „Uebung2_Aufgabe1.m“, sowie „mittelwert“
Anmerkung: Die Funktion „mittelwert“ bildet das ursprüngliche System aus Teilaufgabe b. nach, damit die Ergebnisse entsprechend verglichen werden können.

3. Signalflussgraphen

Leiten Sie aus dem Signalflussgraphen eine Differenzengleichung für das System ab, indem Sie das Ausgangssignal y[n] über die inneren Hilfsgrößen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ schrittweise in eine Differenzengleichung entwickeln.



$x_1[n] = y[n] + 3x[n]$

$x_2[n] = 5x[n] + x_1[n-1]$

$y[n] = x_2[n-1] = 5x[n-1] + x_1[n-2] = 5x[n-1] + y[n-2] + 3x[n-2]$