Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

1. Aufgabenblatt

1. Eigenschaften diskreter Systeme

a. Erläutern Sie die Begriffe

- Linearität
- Zeitinvarianz
- Speicherfreiheit
- Kausalität und
- Stabilität

<u>Linearität:</u>

Ein System wird als linear bezeichnet, wenn für das System das Superpositionsprinzip gilt. Das Superpositionsprinzip besagt, dass die Antwort des Systems auf eine Überlagerung von Eingangssignalen gleich der Überlagerung der Einzelantworten ist. Mathematisch drückt sich das wie folgt aus:

$$S\{u_1[n] + u_2[n]\} = S\{u_1[n]\} + S\{u_2[n]\}$$

Daraus folgt, dass eine Skalierung (Verstärkung oder Abschwächung) des Eingangssignals zu einer ebensolchen Skalierung des Ausgangssignals führt, wie leicht zu zeigen ist:

$$S\{a \cdot u[n]\} = S\left\{\underbrace{u[n] + u[n] + \ldots + u[n]}_{a-mal}\right\} = \underbrace{S\{u[n]\} + S\{u[n]\} + \ldots + S\{u[n]\}}_{a-mal} = a \cdot S\{u[n]\}$$

Oft wird die Linearitätseigenschaft daher auch folgendermaßen ausgedrückt:

$$S\{a_1 \cdot u_1[n] + a_2 \cdot u_2[n]\} = a_1 \cdot S\{u_1[n]\} + a_2 \cdot S\{u_2[n]\}$$

<u>Zeitinvarianz:</u>

Ein System ist zeitinvariant, wenn eine Zeitverschiebung des Inputs zu einer Zeitverschiebung des Outputs führt. Mit anderen Worten: Die Signalform der Systemantwort hängt nicht vom Zeitpunkt des Anlegens des Eingangssignals ab.
In Gleichungsform:
Ist $y[n]$ die Antwort auf ein Signal $x[n]$ $\left(y[n] = S\{x[n]\}\right)$, dann ist
$S\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$

<u>Speicherfreiheit:</u>

Ein System wird als speicherfrei bezeichnet, wenn sein Output für jeden Wert der unabhängigen Variablen nur vom Input <u>zu dieser Zeit</u> abhängt. Z.B.: $y[n] = 5x[n]$. n bezeichnet hierbei den aktuellen Zeitpunkt.

Nicht Speicherfrei wäre demnach folgendes System:
$y[n] = x[n] + x[n-1]$, da der Ausgang des Systems sowohl vom aktuellen, als auch vom vorausgegangenen Sample abhängt.

<u>Kausalität:</u>

Ein System ist kausal, wenn der Output des Systems nur von den Werten des Inputs <u>zur aktuellen Zeit und davor</u> abhängt.
Beispiel: $y[n] = x[n-1] + x[n-2]$ ist kausal, $y[n] = x[n] + x[n+1]$ hingegen nicht.

<u>Stabilität:</u>

Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal antwortet.
$y[n] = 4x[n] + 3x[n-1]$ ist also z.B. ein stabiles System.

Ein Beispiel für ein instabiles System wäre: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$.

Achtung: Ein instabiles System reagiert also nicht unbedingt auf jedes Eingangssignal mit einem unbeschränkten Ausgangssignal.

b. Vier zu betrachtende Systeme werden durch folgende Gleichungen beschrieben. (x[k] = Eingangssignal, y[k] = Ausgangssignal)

1. $y_1[k] = |x[k]| + x[k-2]$
2. $y_2[k] = 2 \cdot (x[k+1] - x[k-1])$
3. $y_3[k] = \sum_{i=k-2}^{k+4} x[i]$
4. $y_4[k] = k \cdot \sin(x[k])$

Untersuchen Sie die Systeme bezüglich der in a) genannten Eigenschaften indem Sie prüfen, ob die jeweiligen Bedingungen für alle Eingangssignale x[k] erfüllt sind.

1. $y_1[k] = |x[k]| + x[k-2]$

- nicht speicherfrei
- stabil
- kausal
- nichtlinear

Beweis: Für lineare System gilt: $S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$

In unserem Fall gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = |a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]| + (a_1 u_1[n-2] + a_2 u_2[n-2])$$
$$\neq$$
$$a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} = a_1(|u_1[n]| + u_1[n-2]) + a_2(|u_2[n]| + u_2[n-2])$$
$$= a_1|u_1[n]| + a_2|u_2[n]| + a_1 u_1[n-2] + a_2 u_2[n-2]$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.
Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

$$\begin{aligned} y_2[k] &= S\{x_2[k]\} \\ &= |x_2[k]| + x_2[k-2] \\ &= |x_1[k+m]| + x_1[k+m-2] \\ &= y_1[k+m] \end{aligned}$$

2. $y_2[k] = 2 \cdot (x[k+1] - x[k-1])$

- nicht speicherfrei
- stabil
- nicht kausal
- linear

Beweis: Für lineare System gilt: $S\{a_1u_1[n]+a_2u_2[n]\}=a_1S\{u_1[n]\}+a_2S\{u_2[n]\}$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
S\{a_1u_1[n]+a_2u_2[n]\} &= 2\cdot\left(\left(a_1u_1[n+1]+a_2u_2[n+1]\right)-\left(a_1u_1[n-1]+a_2u_2[n-1]\right)\right)\\
&= 2\cdot\left(a_1u_1[n+1]-a_1u_1[n-1]\right)+2\cdot\left(a_2u_2[n+1]-a_2u_2[n-1]\right)\\
&= a_1\cdot\underbrace{2\cdot\left(u_1[n+1]-u_1[n-1]\right)}_{S\{u_1[n]\}}+a_2\cdot\underbrace{2\cdot\left(u_2[n+1]-u_2[n-1]\right)}_{S\{u_2[n]\}}\\
&= a_1S\{u_1[n]\}+a_2S\{u_2[n]\}
\end{aligned}$$

- zeitinvariant

  Beweis: Sei $y_1[k]=S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k]=x_1[k+m]$.

  Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\}=y_1[k+m]$ ist:

$$\begin{aligned}
y_2[k] &= S\{x_2[k]\}\\
&= 2\cdot(x_2[k+1]-x_2[k-1])\\
&= 2\cdot(x_1[k+m+1]-x_2[k+m-1])\\
&= y_1[k+m]
\end{aligned}$$

3. $y_3[k]=\sum_{i=k-2}^{k+4}x[i]$

- nicht speicherfrei
- stabil
- nicht kausal
- linear

Beweis: Für lineare System gilt: $S\{a_1u_1[n]+a_2u_2[n]\}=a_1S\{u_1[n]\}+a_2S\{u_2[n]\}$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
S\{a_1u_1[n]+a_2u_2[n]\} &= \sum_{i=n-2}^{n+4}\left(a_1u_1[i]+a_2u_2[i]\right)\\
&= a_1\cdot\underbrace{\sum_{i=n-2}^{n+4}u_1[i]}_{S\{u_1[n]\}}+a_2\cdot\underbrace{\sum_{i=n-2}^{n+4}u_2[i]}_{S\{u_2[n]\}}\\
&= a_1S\{u_1[n]\}+a_2S\{u_2[n]\}
\end{aligned}$$

- zeitinvariant

  Beweis: Sei $y_1[k]=S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k]=x_1[k+m]$.

  Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\}=y_1[k+m]$ ist:

$$\begin{aligned}
y_2[k] &= S\{x_2[k]\}\\
&= \sum_{i=k-2}^{k+4}x_2[i]\\
&= \sum_{i=k-2}^{k+4}x_1[i+m]\\
&= y_1[k+m]
\end{aligned}$$

4. $y_4[k] = k \cdot \sin(x[k])$

- speicherfrei
- instabil
- kausal
- nichtlinear

  Beweis: Für lineare System gilt: $S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$

  In unserem Fall gilt:

  $$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = n \cdot \sin(a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n])$$
  $$\neq$$
  $$a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} = a_1 \cdot n \cdot \sin(u_1[n]) + a_2 \cdot n \cdot \sin(u_2[n])$$

- zeitvariant

  Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.

  Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

  $$\begin{aligned} y_2[k] &= S\{x_2[k]\} \\ &= k \cdot \sin(x_2[k]) \\ &= k \cdot \sin(x_1[k+m]) \\ &\neq \\ y_1[k+m] &= (k+m) \cdot \sin(x_1[k+m]) \end{aligned}$$