Einführung in die digitale Signalverarbeitung WS2012/13

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 13. Aufgabenblatt

1. IIR-Filter

1.1 Laden Sie in Matlab eine Audiodatei mit Sampling-Frequenz von fs = 44100 Hz. Erzeugen sie mit der Funktion *fir1* die Koeffizienten eines FIR Tiefpass Filters 20. Ordnung mit Grenzfrequenz von 2000 Hz und filtern Sie damit das signal. Im Folgenden erzeugen Sie ein IIR Butterworth Filter 4. Ordnung mit der gleichen –3dB Frequenz und filtern sie wieder das Signal. Was merken Sie von Unterschieden zwischen den zwei Versionen?

Siehe Matlab-Datei „Uebung11_Aufgabe1.m".

1.2 Welche sind vier Grundformen von analogen Filtern, die sich besonders gut als digitale IIR Filter implementieren lassen?

Vier bekannten Formen von analogen Filtern, sind:

- Cauer (elliptische)
- Chebyshev Typ I
- Chebyshev Typ II
- Butterworth

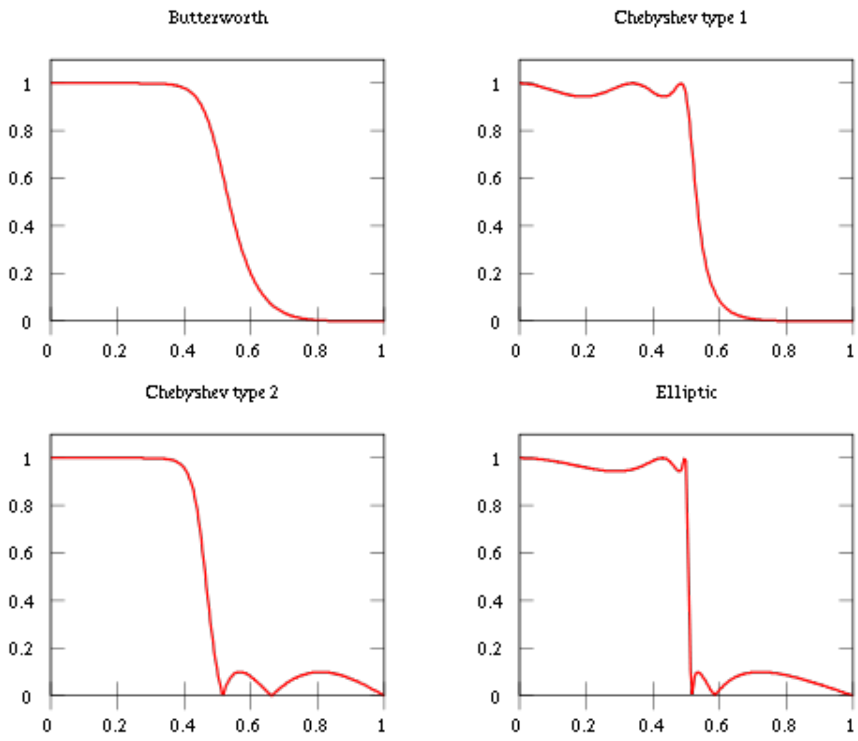
Wie es bei deren Frequenzgängen in Abb. 1 zu sehen ist, haben diese Filter folgende Eigenschaften:

- Das Cauer Filter zeigt eine Welligkeit sowohl in Durchlass- als auch in Sperrbereich, hat aber einen sehr schnellen Übergang von einem zum anderen, also eine sehr enge Transitionsbereich.

- Das Butterworth Filter hat überhaupt keine Welligkeit, weder im Durchlass- noch im Sperrbereich, zeigt aber dafür einen sanfteren, nicht so steilen Übergang im Transitionsbereich.

- Das Chebyshev Typ I hat Welligkeit nur im Durchlassbereich, und einen mäßig schnellen Übergang.

- Das Chebyshev Typ II Filter hat Welligkeit nur im Sperrbereich, und einen mäßig schnellen Übergang.



1.3 Listen Sie Vorteile und Nachteile von FIR und IIR Filtern auf.

FIR Filter

Vorteile:

- Immer stabil
- Linearphasig wenn symmetrisch
- Robust gegen Koeffizientenquantisierung und Rundungsfehler
- Sehr leicht methodisch zu entwerfen und zu regeln

Nachteile:

- Rechenaufwändig und Speicherkostspielig wenn gute Filtercharakteristika erwünscht sind
- Kann nicht bekannten analogen Filter simulieren

IIR Filter

Vorteile:

- Weniger rechenaufwändig, was Rechenleistung und Speicherraum betrifft
- Kann prototypen analogen Filter simulieren (wie z. B. bei Aufgabenteil 1.2)
- Kann mit relativ wenigen Koeffizienten sehr präzise Filterfrequenzgänge schaffen, mit gewünschten Eigenschaften (Welligkeit nur im bestimmten Frequenzbereich, steilen Transitionsbereich)

Nachteile:

- In manchen Implementationsvarianten nicht robust zu Koeffizientenänderungen durch Quantisierung- oder Rundungsfehler
- Stabilität muss bei dem Entwurf vorgesehen werden
- Generell nicht linearphasig
- Implementationsmethoden mathematisch nicht so unkompliziert, Regelung nicht trivial

2. IIR-Filterentwurf mit der Impulsinvarianzmethode

2.1 Beschreiben Sie die Impulsinvarianzmethode für IIR-Filterentwurf in Schritten.

Die Impulsinvarianzmethode geht von einer bekannten Impulsantwort eines kontinuierlichen analogen Filters aus. Diese wird abgetastet, trunkiert und konstituiert dann die zeitdiskrete Impulsantwort unseren IIR Filters. In dieser Weise ist das IIR Filter eine gute Annäherung des analogen Filters, das den gewunschten Frequenzgang aufweist.

Die Schritten für den Entwurf eines IIR-Filters auf Basis dieser Methode sind folgende:

Schritt 1: Die Laplace Übertrgungsfunktion $H(s)$ eines analogen Filters mit den gewünschten Eigenschaften erwerben.

Schritt 2: Aus $H(s)$ die entsprechende Impulsantwort $h(t)$ im kontinuierlichen Zeitbereich berechnen.

Schritt 3: Die Abtastrate f_s möglichst hoch festlegen.

Schritt 4: Die kontinuierliche Impulsantwort $h(t)$ z-transformieren.

Schritt 5: In der $H(z)$ Übertragungsfunktion die zeitvariable t mit $t_s = 1/f_s$ ersetzen.

Schritt 6: Aus $H(z)$ die zeitdiskrete Impulsantwort $h[n]$ berechnen. Sie ist die gewünschte Impulsantwort des IIR-Filters das entworfen wird.

2.2 Von der folgenden Laplace Übertragungsfunktion ausgehend:

$$H(s) = \frac{16250}{s^2 + 250s + 16250}$$

berechnen Sie die Koeffizienten eines digitalen IIR-Filters zweiter Ordnung. Die Abtastrate beträgt 44100 Hz.

Die hier benutzte Übertragungsfunktion ist eine vereinfachte Version eines ausgerechneten analogen Tiefpassfilters zweiter Ordnung.

Wenn wir sie in der Form

$$H(s) = \frac{A\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{A\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$$

umschreiben können ist ihre Rücktransformation im Zeitbereich auf Basis von bekannten Transformationspaaren, die in Tabellen zu finden sind, relativ einfach. Durch Vergleich von der letzteren Gleichung und der gegebenen Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$A\omega = 16250$$

$$2a = 250$$

$$a^2 + \omega^2 = 16250$$

Aus dieser 3 Gleichungen kommt raus:

$$a = {}^{250}\!/_{2} = 125$$

$$a^2 + \omega^2 = 16250 \Rightarrow 125^2 + \omega^2 = 16250 \Rightarrow 15625 + \omega^2 = 16250 \Rightarrow \omega^2 = 625 \Rightarrow \omega = 25$$

$$A\omega = 16250 \Rightarrow A = {}^{16250}\!/_{\omega} = {}^{16250}\!/_{25} = 650$$

So lässt sich die $H(s)$ schreiben:

$$H(s) = \frac{650 \cdot 25}{(s+125)^2 + 25^2}$$

Und entsprechend zurücktransformieren:

$$h(t) = Ae^{-at}\sin(\omega t) = 650e^{-125t}\sin(25t)$$

Die z-Transformation dieser **kontinuierlichen** Impulsantwort ist:

$$H(z) = \frac{650e^{-125t}\sin(25t)z^{-1}}{1 - 2[e^{-125t}\cos(25t)]z^{-1} + e^{-250t}z^{-2}}$$

An dem Punkt muss man einfach die Zeitvariante mir ihrem diskreten Pendant ($t_s = {}^{1}\!/_{f_s} = {}^{1}\!/_{44100} = 0.00002268$) ersetzen:

$$H(z) = \frac{650e^{-0.0028344671}\sin(0.00056689342)z^{-1}}{1 - 2[e^{-0.0028344671}\cos(0.00056689342)]z^{-1} + e^{-0.0056689342}z^{-2}}$$

$$= \frac{650 \cdot 0.99717 \cdot 0.00056689342z^{-1}}{1 - 2[0.99717 \cdot 1]z^{-1} + 0.99435z^{-2}} = \frac{0.36744z^{-1}}{1 - 1.9943z^{-1} + 0.99435z^{-2}}$$

Dann bleibt einfach übrig, das Ergebnis zurück in den diskreten Zeitbereich zu transformieren. Es ist also:

$$y[n] = 0.36744x[n-1] + 1.9943y[n-1] - 0.99435y[n-2]$$

2.3 Plotten Sie das Filter in Matlab mithilfe der Funktion *fvtool*(*b,a*) und *freqz*(*b,a*) und diskutieren Sie Vor- und Nachteile dieses Filters in dieser Implementation.

Siehe Matlab-Datei „Uebung11_Aufgabe2_3.m"

Dieses Filter sieht so aus, dass es eine gute Approximation des analogen Filters ist. Das Problem ist allerdings, dass mit der ausgewählten Samplerate das IIR Filter instabil ist, da die Wurzel des Nennerpolynoms -2.40735 und 0.41305 sind (der erste Wurzel liegt also außerhalb des Einheitskreises). Das ist nicht eindeutig ein Problem der Abtastrate, sondern liegt schon in der Laplaceübertragungsfunktion, dass wir hier benutzt haben. Ihre Koeffiziente geben sehr einfache Werte und das Nennerpolynom hat alle seine Wurzel in der linken Halbebene ($-125 \pm 25j$), gibt aber für große Abtastfrequenzen instabile IIR Filter wenn man dieser Methode folgt. Das heißt: Entweder sollte man Koeffizienten der Laplaceübertragungsfunktion so aussuchen, dass sie tatsächlich für eine Abtastrate von 44100 *Hz* zu einem stabilen IIR-Filter führen, oder die Abtastrate genug verringern, sodass es ein stabiles IIR Filter resultiert. Hier wird nur die zweite Variante versucht, da für die erste muss man einfach bei einem guten Filterkochbuch reinschauen um die richtige Koeffizienten zu bekommen.

Ausgehend von einer Abtastrate von 100 *Hz* bekommen wir nach dem Ersetzen von dem Inversen in die z-Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{650e^{-125t}\sin(25t)z^{-1}}{1-2[e^{-125t}\cos(25t)]z^{-1} + e^{-250t}z^{-2}} \overset{t=1/100}{\Rightarrow}$$

$$H(z) = \frac{650e^{-1.25}\sin(0.25)z^{-1}}{1-2[e^{-1.25}\cos(0.25)]z^{-1} + e^{-2.5}z^{-2}}$$

$$= \frac{650\cdot 0.2865\cdot 0.2474z^{-1}}{1-2[0.2865\cdot 0.96891]z^{-1} + 0.082085z^{-2}} = \frac{46.072z^{-1}}{1-0.55519z^{-1} + 0.082085z^{-2}}$$

Damit haben wir ein stabiles Filter bekommen (mit Polstellen bei $0.27759 \pm 0.07089j$, also innerhalb des Einheitskreises), das aber Koeffizienten hat, die sich nicht so einfach realisieren lassen, da sie entweder sehr großen Wert haben oder sehr kleinen, nahe Null. Außerdem macht eine angenommene Abtastrate das Filter nicht mehr so nützlich, da es dann im Bereich von 0 bis 50 *Hz* arbeiten soll, was für akustischen Anwendungen nicht hilfreich ist. Man sieht also, dass man sehr vorsichtig schon beim ersten Schritt sein soll, sodass das resultierende IIR Filter die gewünschte Voraussetzungen erfüllt. Die Prozedur um von Spezifikationen eines analogen Filters zu der Laplace-Übertragungsfunktion zu kommen sind im siebten Kapitel von [3] in Beispiele 7.2 und 7.3 geschildert.

2.4 Benutzen Sie die erzeugten Koeffizienten um eine Audiodatei zu filtern (z. B. diese aus Aufgabe 1). Können Sie auditiv das Verhalten des Filters voraussagen, mit Bezug auf die davor erzeugten Grafiken? Was passiert wenn man für das Filter eine kleinere Abtastrate benutzt?

Siehe Matlab-Datei „Uebung11_Aufgabe2_4.m“

3. Entwurf von IIR-Filter mit der bilinearen Transformation

3.1 Beschreiben Sie die bilineare Transformationsmethode für IIR-Filterentwurf in Schritten.

Die bilineare Transformationen ist eine Filterentwurfmethode nach der wieder ein analoges Prototypfilter approximiert wird. Diese Methode hat drei wichtige Eigenschaften: Sie erlaubt mittels einer Transformation direkt von der Laplace- zu der z-Übertragungsfunktion zu kommen. Sie schafft ein Mapping der ganzen s-Ebene auf der ganzen z-Ebene, dass die Aliasing-Probleme verringert. Schließlich, wegen der Nichtlinearität der Transformation ist es viel einfacher, einen steileren Transitionsbereich zu bekommen.

Die Schritten für den Entwurf eines IIR-Filters auf Basis dieser Methode sind folgende:

Schritt 1: Die Laplace Übertragungsfunktion $H(s)$ eines analogen Filters mit den gewünschten Eigenschaften erwerben.

Schritt 2: Die Abtastrate f_s festlegen.

Schritt 3: Bei der $H(s)$ die Variablenänderung $s = 2f_s \frac{z-1}{z+1}$ durchführen.

Schritt 4: Die $H(z)$ Übertragungsfunktion umformen sodass sie inder Standardform vorliegt.

Schritt 5: Aus der $H(z)$ Übertragungsfunktion die Koeffizienten ablesen oder in den diskreten Zeitbereich zurücktransformieren, um die Differenzengleichung zu bekommen.

3.2 Mit der folgenden Übertragungsfunktion im s-Bereich

$$H(s) = \frac{1741563.32}{s^2 + 13821.54s + 1741563.32}$$

berechnen Sie die Filterkoeffizienten mittels der bilinearen Transformation. Die Abtastrate beträgt jetzt 5000 Hz.

Aus der Übertragungsfunktion in der Form $H(s) = \frac{c}{s^2 + bs + c}$ mit der Transformation $s = 2f_s \frac{z-1}{z+1}$ bekommen wir:

$$H(z) = \frac{c}{(2f_s \frac{z-1}{z+1})^2 + b(2f_s \frac{z-1}{z+1}) + c}$$

$$H(z) = \frac{c(z+1)^2}{4f_s^2(z-1)^2 + b(2f_s)(z-1)(z+1) + c(z+1)^2}$$

$$H(z) = \frac{c(z^2 + z + 1)}{(4f_s^2 + b(2f_s) + c)z^2 + (2c - 2\cdot 2f_s)z + ((4f_s^2) + c - b(2f_s))}$$

Wenn wir Zähler und Nenner mit $(4f_s^2 + b(2f_s) + c)z^2$ dividieren und die numerische Werte einsetzen bekommen wir:

$$H(z) = \frac{0.0072578(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 0.81897z^{-1} - 0.152z^{-2}}$$

Daraus resultiert die Differenzengleichung des Filters:

$$y[n] = 0.0072578x[n] + 0.0145156x[n-1] + 0.0072578x[n-2] + 0.81897y[n-1] + 0.152y[n-2]$$

3.3 Vergleichen Sie die Koeffizienten mit denen aus Aufgabenteil 2.2. Plotten Sie das Filter in Matlab mithilfe der Funktionen *fvtool*(*b,a*) und *freqz*(*b,a*) und vergleichen Sie die Verläufe und Grafiken mit denen aus Aufgabenteil 2.3. Was merken Sie für die zwei Filter?

Siehe Matlab-Datei „Uebung11_Aufgabe3_3.m“

3.4 Benutzen Sie die erzeugten Koeffizienten um eine Audiodatei zu filtern (z. B. diese aus Aufgabe 1). Können Sie auditiv das Verhalten des Filters voraussagen, mit Bezug auf die davor erzeugten Grafiken?

Siehe Matlab-Datei „Uebung11_Aufgabe3_4.m“

Literatur:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_filter, Zugriff 31.01.2012

[2] Richard G. Lyons. *Understanding Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1996.

[3] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, 2., überarbeitete Aufl., Pearson, 2004