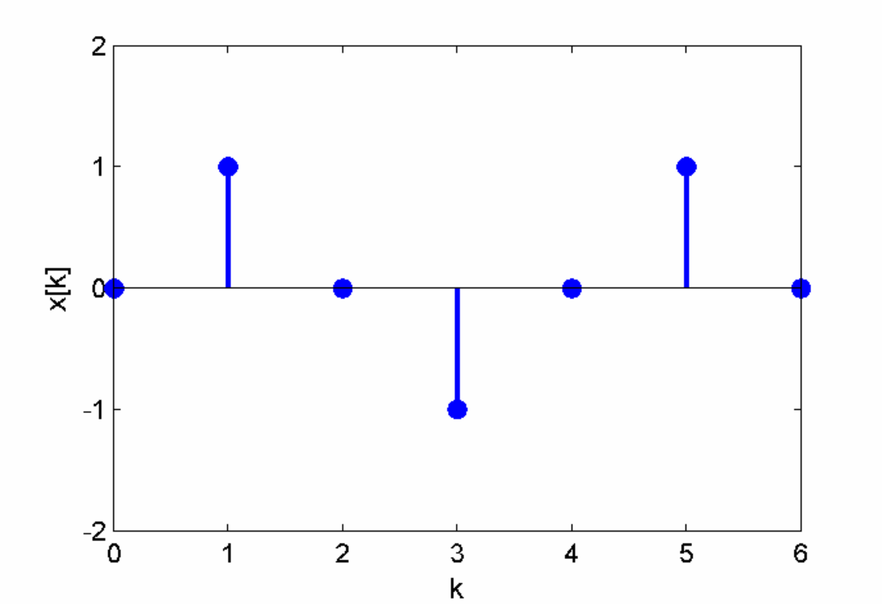
DFT und Abtastung

Gegeben sei ein analoger Sinusverlauf mit 1 kHz Signalfrequenz. Als Ergebnis einer Abtastung mit der Abtastfrequenz f_S = 4 kHz ergibt sich folgendes diskretes Signal:



a) Berechnen Sie für ein Analysefenster von vier Abtastwerten (k = 0...3) die vier Werte X[n] einer Diskreten Fouriertransformation (DFT).

Die Analysegleichung der DFT lautet:

$$X(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

Mit einer FFT-Länge von N=4 ergibt sich:

$$X(n) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{3} x[k] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)n} - 1 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}n} - e^{-j\frac{3\pi}{2}n}\right)$$

Die ersten vier Werte ergeben sich somit wie folgt:

$$X(0)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 0}-e^{-j\frac{3\pi}{2}\cdot 0}\right)=\frac{1}{4}(1-1)=0$$

$$X(1)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 1}-e^{-j\frac{3\pi}{2}\cdot 1}\right)=\frac{1}{4}(-j-j)=-\frac{j}{2}$$

$$X(2)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 2}-e^{-j\frac{3\pi}{2}\cdot 2}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\pi}-e^{-j3\pi}\right)=\frac{1}{4}(-1-(-1))=0$$

$$X(3)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 3}-e^{-j\frac{3\pi}{2}\cdot 3}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{-j\frac{3}{2}\pi}-e^{-j\frac{9}{2}\pi}\right)=\frac{1}{4}(j-(-j))=\frac{j}{2}$$

b) Zeichnen Sie das Betragsspektrum |X[n]| und skalieren Sie die Indizes n mit den zugehörigen Frequenzwerten f wenn f_S = 4 kHz.

Für die Beträge ergibt sich:

$$|X(0)|=|0|=0$$

$$|X(1)|=\left|-\frac{j}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

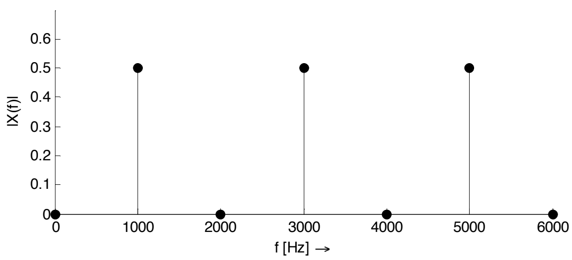
$$|X(2)|=0$$

$$|X(3)|=\left|\frac{j}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

Die Skalierung erfolgt mit:

$$f=\frac{n}{N}\cdot f_S$$

Das Betragsspektrum ergibt sich demnach wie folgt:



c) Wenn Sie das gleiche analoge Signal mit einer Abtastfrequenz von f_S = 1,5 kHz abtasten: Bei welchen Frequenzen erwarten Sie Anteile im Spektrum X(f)? Wie groß müssen Sie das Analysefenster wählen (wieviele Abtastwerte), um X(f) genau an diesen Stellen abzutasten ?

Es ergeben sich Anteile an den Stellen $n \cdot f_S \pm f$, also bei 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 2,5 kHz, 3,5 Hz, 4 kHz, …

Um das Signal genau an diesen Stellen abzutasten, wird ein Analysefenster der Länge 3 benötigt.