Einführung in die Digitale Verarbeitung WS10/11

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

8. Aufgabenblatt

Analyse von LTI-Systemen.

1. Betrachten Sie ein stabiles lineares zeitinvariantes System mit der Eingangsfolge $x[n]$ und der Ausgangsfolge $y[n]$. Die Ein- und die Ausgangsfolge erfüllen die Differenzengleichung

$$y[n-1]-\frac{10}{3}y[n]+y[n+1]=x[n].$$

1.1 Stellen Sie die Pole und Nullstellen in der z-Ebene graphisch dar.

1.2 Bestimmen sie die Impulsantwort $h[n]$.

(*Aufgabe 5.2, S. 390 in* [OS04])

Antwort:

1.1 Die Differenzengleichung kann direkt z-transformiert werden.

$$Y(z)\cdot z^{-1}-\frac{10}{3}\cdot Y(z)+Y(z)\cdot z=X(z)\Rightarrow Y(z)\cdot(z^{1}-\frac{10}{3}+z)=X(z)$$

$$\Rightarrow\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{1}{z^{1}-\frac{10}{3}+z}\Rightarrow H(z)=\frac{z}{1-\frac{10}{3}\cdot z+z^{2}}=\frac{z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

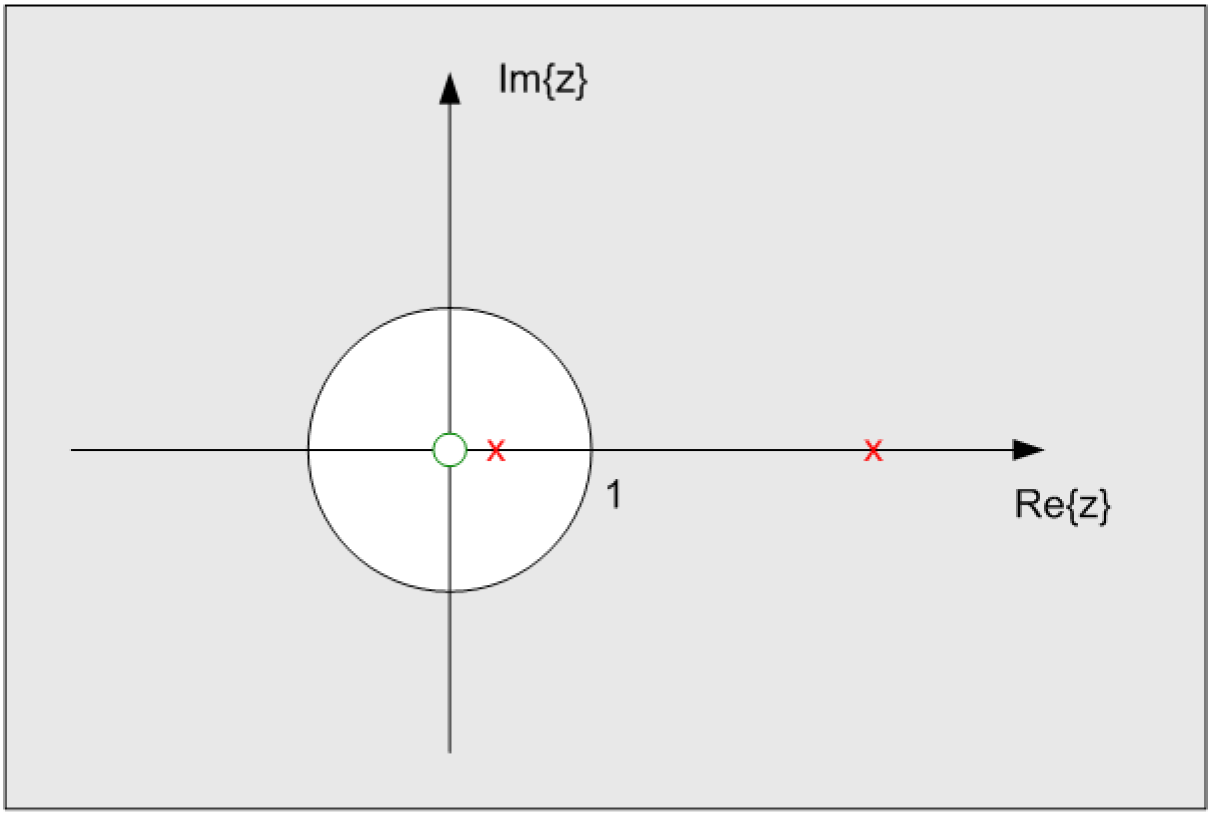
Davon lässt sich ablesen, dass die Pole der Übertragungsfunktion sind

$$z_{P1}=3,\quad z_{P2}=\frac{1}{3}$$

und die Nullstellen

$$z_{N1}=0$$

Die Wurzel von einem Polynom können auch im Matlab mit dem Befehl *roots* gefunden werden. Die Darstellung auf der z-Ebene folgt aus den Ergebnissen.



1.2 Die Impulsantwort kann durch Polynomdivision ermittelt werden.

$$z : \left(z^2 - (10/3)z + 1\right) = z^{-1} + (10/3)z^{-2} - (91/9)z^{-3} + (820/27)z^{-4}$$

$$
\begin{array}{l}
z \\
\underline{-\ \ z - (10/3) + z^{-1}} \\
\quad 0 - (10/3)\ - z^{-1} \\
\quad \underline{-\ \ ((10/3)-(100/9)z^{-1} + (10/3)z^{-2})} \\
\qquad\qquad 0 + (91/9)z^{-1} - (10/3)z^{-2} \\
\qquad\qquad \underline{-((91/9)z^{-1} + (910/27)z^{-2} + (91/9)z^{-3})} \\
\qquad\qquad\qquad 0\ \ +(820/27)z^{-2} + (91/9)z^{-3}
\end{array}
$$

Davon ist die Impulsantwort abzulesen. Wenn

$$H(z) = z^{-1} + \frac{10}{3} z^{-2} + \frac{91}{9} z^{-3} + \frac{820}{27} z^{-4}$$

erhalten wir mit Rücktransformation

$$h[n] = \delta[n-1] + \frac{10}{3}\delta[n-2] + \frac{91}{9}\delta[n-3] + \frac{820}{27}\delta[n-4]$$

Oder mit Partialbruchzerlegung kann man auch eine geschloßene Form erhalten:

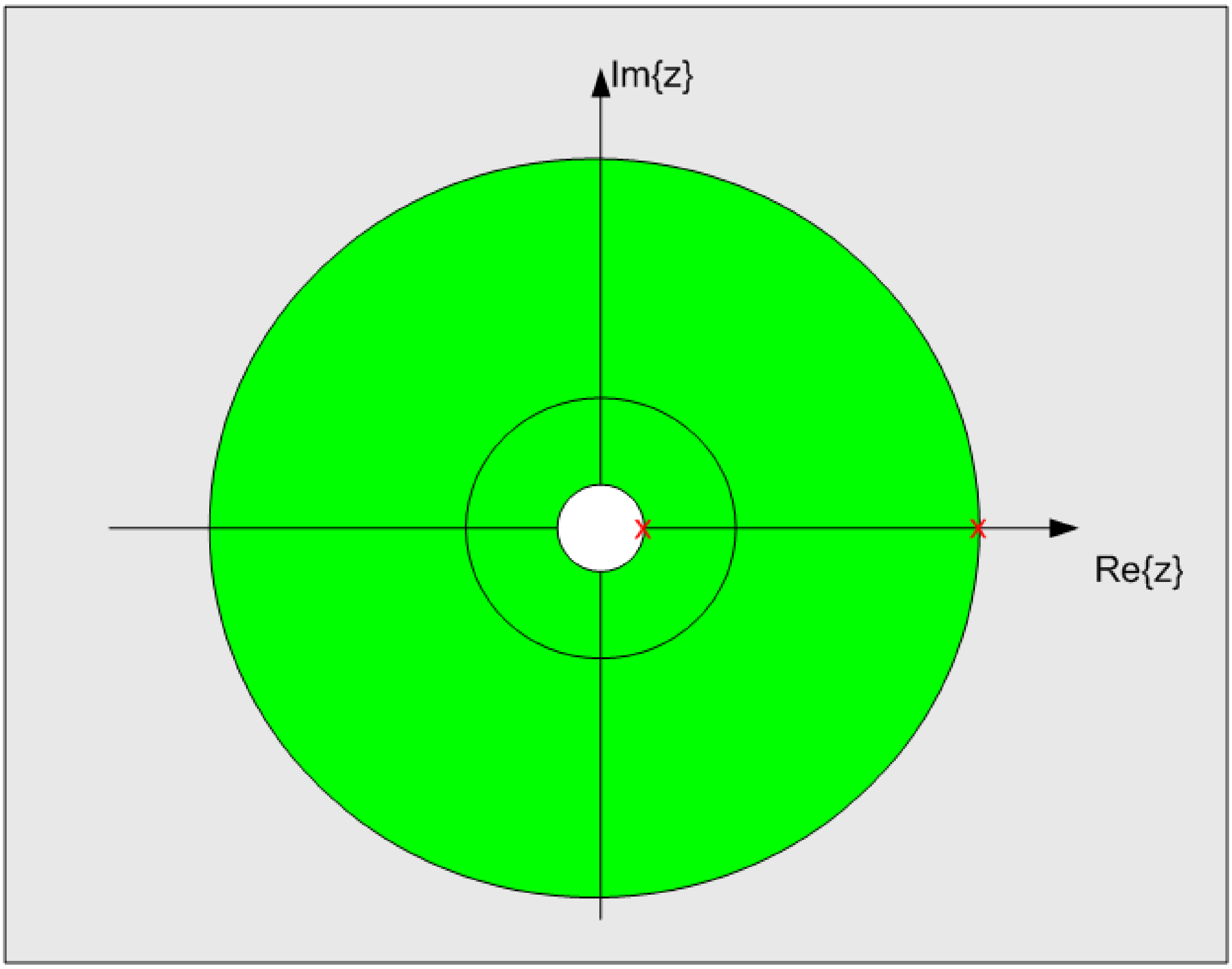
Es ist

$$H(z)=\frac{\frac{9}{8}}{z-3}+\frac{-\frac{1}{8}}{z-\frac{1}{3}}$$

Und it Nutzung der Tabelle der bekannte Paare der z-Transformation bekommt man

$$h[n]=-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]+\frac{9}{8}(3)^{n}u[-n-1]$$

Hier kann man merken, dass aus der letzteren Übertragungsfunktion lässt es nicht schlussfolgern, welche Folge die Rücktransformation gibt (siehe Beispiele 3.1 – 3.3 in [OS04]). Man muss dazu auch den Konvergenzbereich angeben, um sicherzustellen, ob es um eine links- oder rechtsseitige Folge handelt. In dem Fall aber ist es bekannt, dass es hier ein stabiles System zu betrachten ist. Das heißt, der Konvergenzbereich (im Grün bezeichnet) schließt den Einheitskreis ein, wie man hier sieht:



Das ist nur möglich wenn der Konvergenzbereich des äußersten Pols nach 'innen' streckt, was dann heißt, dass die resultierende Folge aber nicht kausal sein wird.

2. Ein kausales lineares zeitinvariantes System lässt sich beschreiben durch die Differenzengleichung

$$y[n]=\frac{3}{2}y[n-1]+y[n-2]+x[n-1]$$

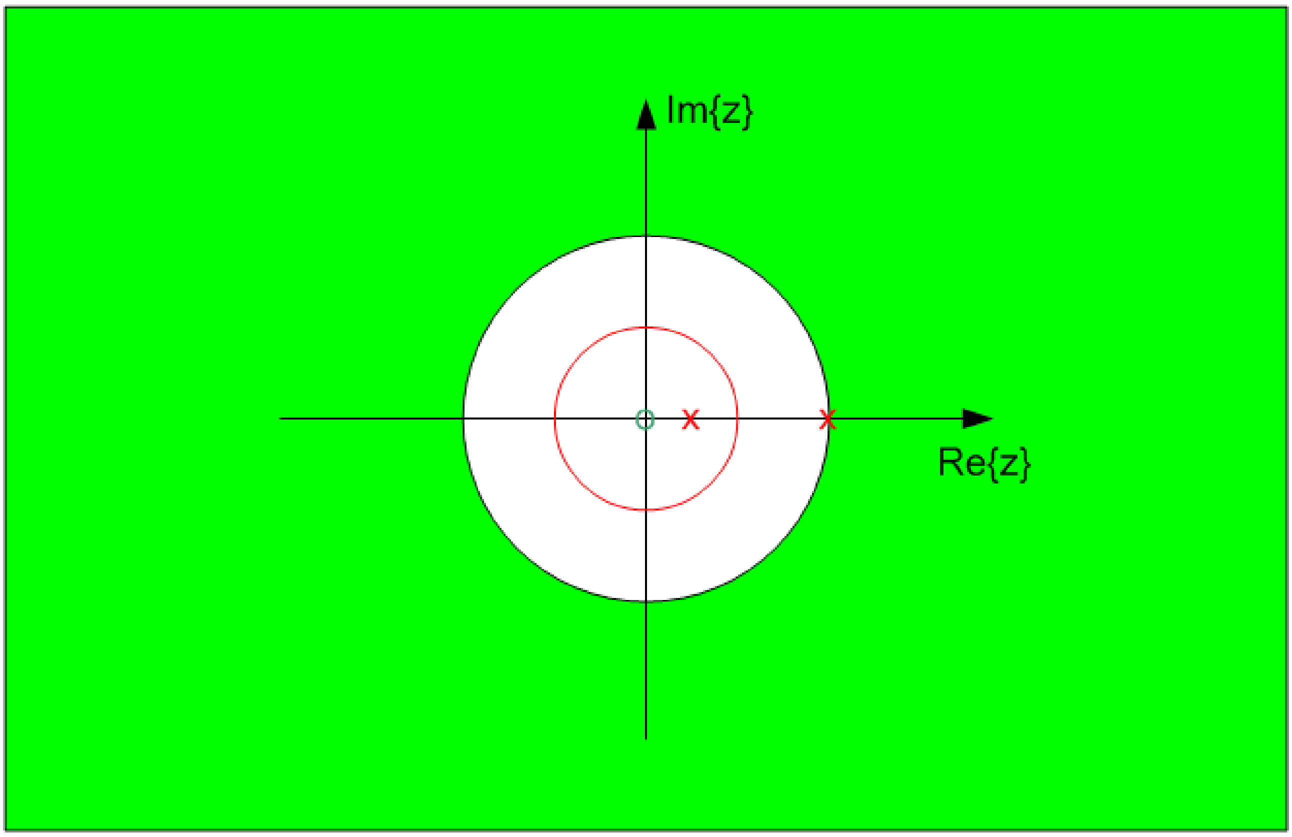
2.1 Bestimmen Sie die Systemfunktion $H(z) = Y(z)/X(z)$ dieses Systems. Stellen Sie die Pole und Nullstellen von $H(z)$ graphisch dar und geben Sie den Konvergenzbereich an.

Wiederum lässt sich die Systemfunktion aus der Diffenenzengleichung ermitteln.

$$Y(z)=\frac{3}{2}\cdot Y(z)z^{-1}+Y(z)\cdot z^{-2}+X(z)\Rightarrow Y(z)\cdot(1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2})=X(z)\cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+z^{-2}}\Rightarrow H(z)=\frac{z}{z^2-\frac{3}{2}z-1}=\frac{z}{(z-2)(z+\frac{1}{2})}$$

Daraus kommt die Darstellung von Polen und Nustellen auf der z-Ebene:



Hier ist aber der Konvergenzbereich $|z| > 2$, da es nicht gesagt ist, ob das System stabil ist oder nicht. Es ist trotzdem angegeben, dass das System kausal ist. Deswegen muss jede Folge, die in dem Impulsantwort auftritt eine rechtsseitige Folge sein, und somit liegt der Konvergenzbereich außerhalb des äußersten Pols. Das System ist also kausal aber instabil.

2.2 Ermitteln Sie die Impulsantwort des Systems.

Die Impulsantwort ist wieder mit Polynomdivision zu berechnen. Genau in der gleichen Weise wie bei 1.2 bekommt man

$$H(z)=z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}+\frac{13}{4}z^{-3}+\frac{51}{8}z^{-4}\Rightarrow h[n]=\delta[n-1]+\frac{3}{2}\delta[n-2]+\frac{13}{4}\delta[n-3]+\frac{51}{8}\delta[n-4]$$

Entsprechend ist durch Partialbruchzerlegung:

$$h[n]=-(\frac{2}{5})(\frac{-1}{2})^{n}u[n]+(\frac{2}{5})(2)^{n}u[n]$$

2.3 Ist das System stabil oder instabil? Ermitteln sie ein stabile (nichtkausale) Impulsantwort, die die Differenzengleichung erfüllt.

Auch aus der letzten Gleichung ist es leicht ersichtlich, dass das System nicht stabil sein kann. Um eine nichtkausale Impulsantwort zu ermitteln, ändern wir die Impulsantwort so:

$$h[n]=-(\frac{2}{5})(\frac{-1}{2})^{n}u[n]-(\frac{2}{5})(2)^{n}u[-n-1]$$

Diese Impulsantwort entspricht der gleichen Übertragungsfunktion, ist aber akausal. Da aber die Folge, die aus dem Pol z = 2 resultiert jetzt eine linkseitige Folge ist, liegt der Konvergenzbereich für diesen Pol innerhalb. Das heißt, der gesamte Konvergenzbereich wird zu einem Ring, $0.5 < |z| < 2$, und dadurch ist die Einheitskreis eingeschlossen und das System stabilisiert.

(*Aufgabe 5.8, S. 392 in* [OS04], *geringfügig modifiziert*)

3. Ein zeitdiskretes kausales LTI System hat die Systemfunktion

$$H(z)=\frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-9z^{-2})}{1+0.81z^{-2}}$$

3.1 Ist das System stabil?

3.2 Formulieren Sie die Ausdrücke für ein Minimalphasensystem $H_1(z)$ und einen Allpass $H_{ap}(z)$, sodass

$$H_{(z)}=H_1(z)\cdot H_{ap}(z)$$

(*Aufgabe 5.12, S. 393 in* [OS04])

3.1 Um eine Aussage über die Stabilität des Systems zu machen, schreiben wir die Systemfunktion folgenderweise:

$$H(z)=\frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-9z^{-2})}{(1-j\cdot 0.9\,z^{-1})(1+j\cdot 0.9\,z^{-1})}$$

So kann man sehen, dass die Pole des Systems (also die Wurzel des Nennerpolynoms) sind

$$z_{1P}=j\cdot 0.9,\ \ z_{2P}=-j\cdot 0.9\ .$$

Sie liegen beide innerhalb des Einheitskreises, und somit ist das System stabil.

3.2 Die gewünschte Form, die hier zu erreichen ist, besagt, dass die Übertragungsfunktion eines Systems kann geschrieben werden als das Produkt der Funktionen zweier Systeme: Eines Minimalphasensystems und eines Allpasses. Das Allpass System beeinflüsst nicht den Betragsfrequenzgang des Gesamtsystems (wie von dem Namen zu entnehmen ist), sondern nur den Phasenfrequenzgang.

Dafür versucht man schrittweise die 2 Systeme anzunähern. Zuerst formt man die Übertragungsfunktion um:

$$H(z)=\frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-3z^{-1})\cdot(1+3z^{-1})}{(1-j\cdot 0.9\,z^{-1})(1+j\cdot 0.9\,z^{-1})}$$

So ist zu bemerken, dass die zwei Nustellen für z = 3 und z = -3 sind sie, die die "zusätzliche" Phase addieren (siehe [OS04], Abs. 5.5 und 5.6), da wenn wir minimalphasensysteme betrachten, sie haben alle ihre Nullstellen **innerhalb** des Einheitskreises. Um aus der letzteren Gleichung ein Minimalphasensystem zu bekommen „spiegeln" wir diese zwei Nullstellen um den Einheitskreis, indem wir die Konjugierte Reziproken davon nehmen. In diesem Fall sind beide Nullstellen reell, deshalb bekommt man für die neuen z = 1/3 und z = -1/3. Dadurch lässt sich die Übertragungsfunktion des Systems $H_1(z)$ so ausdrücken:

$$H_1(z)=\frac{(1+0.2z^{-1})\cdot(1-\frac{1}{3}z^{-1})\cdot(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-j\cdot 0.9\,z^{-1})(1+j\cdot 0.9\,z^{-1})}$$

Das Allpass System muss man dann notwendigerweise im Nenner als Polynom die zwei neuhinzugefügte Terme haben, damit sie sich mit den aus $H_1(z)$ aufheben. Das was übrig bleibt, ist den Zähler des Allpasssystems zu finden, und der ist nichts Anderes als ein Polynom mit den zwei Nullstellen für z = 3 und z = -3. Es ist auch noch ein Faktor hinzugefügt, um sicherzustellen, dass wir genau den gleichen Betragsfrequenzgang bekommen wie vorher. Schliesslich:

$$H_{AP}(z)=\frac{-9\cdot(z^{-1}-\frac{1}{3})(z^{-1}+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

LITERATUR:[OS04] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck: **Zeitdiskrete Signalverarbeitung**, 2., überarbeitete Aufl., Pearson, 2004