Grundlagen der Diskreten Fouriertransformation (DFT)

Die Analysegleichung der DFT lautet:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

a) Wofür stehen die Symbole n, x[n], N, k und X[k]?

n ist die diskrete Zeitvariable oder Zeitindex und gehört zu den ganzen Zahlen

x[n] ist ein zeitdiskretes Signal (Folge, Sequenz). Will man die DFT von x[n] bestimmen, dann besteht x[n] aus N Abtastwerten: x[0], …, x[N-1]

k ist die diskrete Frequenzvariable oder Frequenzindex und gehört ebenfalls zu den ganzen Zahlen.

X[k] ist die DFT und besteht aus N Werten: X[0], …, X[N-1]. Denkt man nur an einen Wert, dann bezeichnet man X[k] als den k-ten DFT-Koeffizienzten.

b) Was geschieht mit dem Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals, wenn es mit der Frequenz f_s abgetastet wird?

Das Spektrum wird periodisch fortgesetzt mit der Periode f_s.

c) Wie heißt der Bandüberlappungsfehler, der bei der Abtastung entsteht und wie kann man ihn vermeiden?

Aliasing. Weitere Bezeichnungen: Aliasingfehler, Unterabtastung, Rückfaltungsverzerrungen.
Durch Einsatz eines Bandbegrenzungsfilters – auch Antialiasingfilter genannt – und/oder Erhöhen der Abtastfrequenz.

d) Wie wirkt sich das Herausschneiden von N Abtastwerten (Rechteckfensterung) auf das Spektrum aus?

Das Spektrum wird verschmiert.

e) Was versteht man unter dem Nyquistbereich und der Nyquistfrequenz? Warum wird die DFT meistens nur im Nyquistbereich ausgewertet?

Den Frequenzbereich von 0 … 0.5 f_s und die Frequenz 0.5 f_s.
Die DFT ist nur im Frequenzbereich von -0.5 fs … 0.5 fs eine Approximation für das Spektrum eines reellen, zeitkontinuierlichen Signals. Zusätzlich ist die DFT bezüglich der Frequenz 0 symmetrisch.

f) An welchen Frequenzstellen treten bei der DFT die Spektrallinien auf und wie groß ist ihr Abstand?

An den Frequenzstellen $f = 0, \frac{f_s}{N}, 2\frac{f_s}{N}, 3\frac{f_s}{N}, \ldots, (N-1)\frac{f_s}{N}$. Ihr Abstand ist demnach gleich $\frac{f_s}{N}$.

Aus: D. Ch. V. Grünigen, Digitale Signalverarbeitung, Fachbuchverlag Leipzig / Carl Hanser Verlag, München / Wien 2001