10. Übung EDS (WiSe10/11, 0135 L 372)
Eigenschaften der DFT

TU Berlin, FG Audiokommunikation, Frank Schultz

Do, 20.01.2011, 12:15 Uhr

Periodizität der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das DFT/IDFT-Paar $X[k]$ und $x[n]$ die Signalperiodizität N aufweist.
mit $m, n, k, k' \in \mathbb{Z}$ für die DFT:

$$X[k'] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{k'}{N}\, n} \tag{1}$$

$$X[k' = k + m\, N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{k + m\, N}{N}\, n} \tag{2}$$

$$X[k + m\, N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{k}{N}\, n}\, \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{m\, N}{N}\, n}}_{1} = X[k] \tag{3}$$

Periodizität der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das DFT/IDFT-Paar $X[k]$ und $x[n]$ die Signalperiodizität N aufweist.
mit $m, n, n', k \in \mathbb{Z}$ für die IDFT:

$$x[n'] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{n'}{N}\, k} \tag{4}$$

$$x[n' = n + m\, N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{n + m\, N}{N}\, k} \tag{5}$$

$$x[n + m\, N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{n}{N}\, k} \underbrace{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{m\, N}{N}\, k}}_{1} = x[n] \tag{6}$$

Symmetrie der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das komplexe Spektrum X[k] der diskreten Fouriertransformation einer reellen Zeitfolge x[n] bezüglich dem (Stütz)punkt bei k=N/2 (wie auch immer) symmetrisch ist.
DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} \tag{7}$$

IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{n}{N}\,k} \tag{8}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 1

FT eines reellen $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{9}$$

ω ersetzen durch $-\omega$:

$$X(-\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{10}$$

konjugiert komplex auf beiden Seiten:

$$X(-\omega)^* = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{11}$$

man sieht:

$$X(\omega) = X(-\omega)^* \tag{12}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 2

FT:

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{13}$$

$$X(\omega) = X(-\omega)^* \tag{14}$$

Axialsymmetrie

$$\Re\left\{X(-\omega)\right\} = \Re\left\{X(\omega)\right\} \tag{15}$$

Punktsymmetrie

$$\Im\left\{X(-\omega)\right\} = -\Im\left\{X(\omega)\right\} \tag{16}$$

Axialsymmetrie

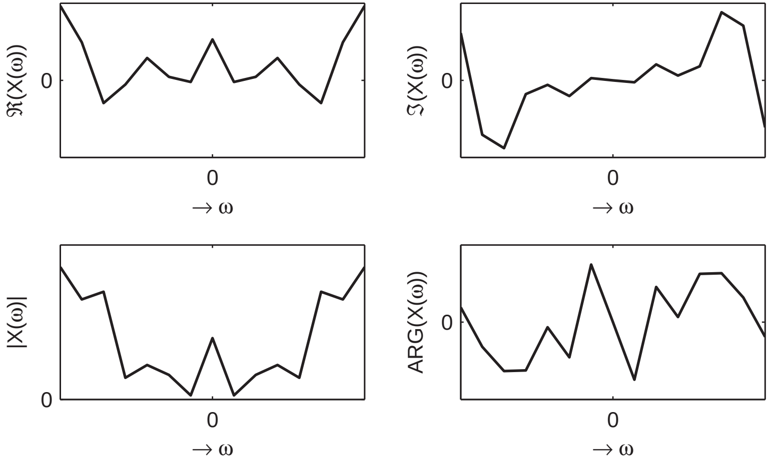
$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \tag{17}$$

Punktsymmetrie

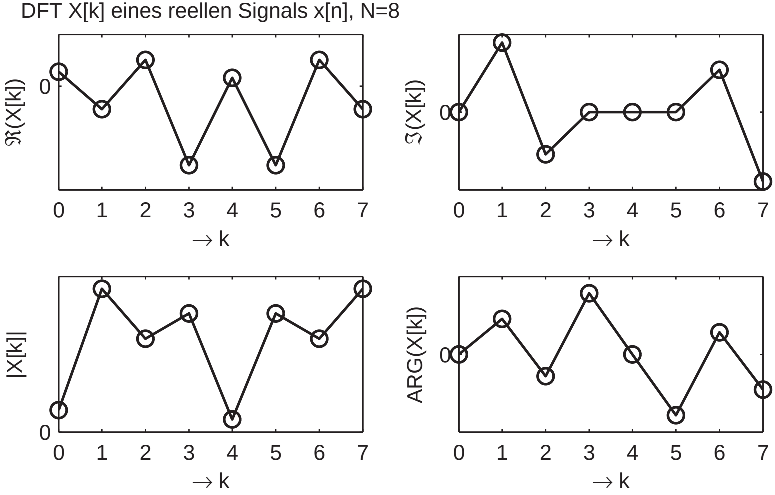
$$\mathrm{ARG}\left\{X(-\omega)\right\} = -\mathrm{ARG}\left\{X(\omega)\right\} \tag{18}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 3

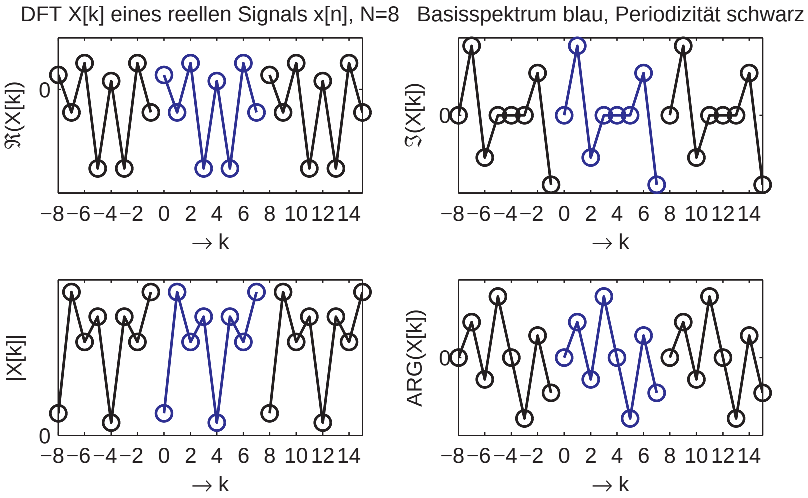
Fouriertransformierte X(ω) eines reellen Signals x(t)



Symmetrie der DFT um N/2=4



Symmetrie um N/2=4 und Periodizität N=8 der DFT



Symmetrie der DFT, Behauptung

es soll also rechnerisch gezeigt werden, dass

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \stackrel{!}{=} +\Re\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{19}$$

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \stackrel{!}{=} -\Im\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{20}$$

bzw. in Kurzform:

$$X[\frac{N}{2}+l] \stackrel{!}{=} X[\frac{N}{2}-l]^* \tag{21}$$

Symmetrie der DFT, Einsetzen in DFT

DFT:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} \tag{22}$$

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{\left(\frac{N}{2}+l\right)}{N}\,n} \tag{23}$$

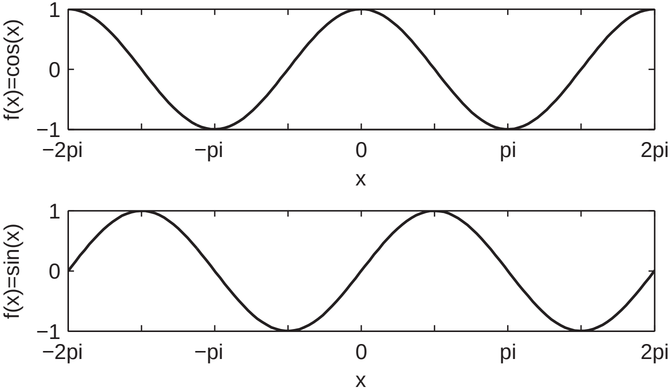
$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(n\,\pi+n\,\frac{2\,\pi\,l}{N}\right)} \tag{24}$$

Symmetrie der DFT, Euleridentität anwenden

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(n\,\pi + n\,\frac{2\,\pi\,l}{N}\right)} \tag{25}$$

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\left(\cos\left(n\,\pi + \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right) - \mathrm{j}\,\sin\left(n\,\pi + \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \tag{26}$$

Eigenschaften Sinus / Cosinus, Additionstheoreme



$$\cos(n\pi + \alpha) = \cos(n\pi - \alpha) \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{27}$$

$$-\sin(n\pi + \alpha) = +\sin(n\pi - \alpha) \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{28}$$

Symmetrie der DFT, Zusammenfassung bisheriges

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(n\,\pi + n\,\frac{2\,\pi\,l}{N}\right)} \tag{29}$$

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\left(\cos\left(n\,\pi+\frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right) - \mathrm{j}\,\sin\left(n\,\pi+\frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \tag{30}$$

$$\cos(n\,\pi+\alpha) = \cos(n\,\pi-\alpha) \qquad n\in\mathbb{Z} \tag{31}$$

$$-\sin(n\,\pi+\alpha) = +\sin(n\,\pi-\alpha) \qquad n\in\mathbb{Z} \tag{32}$$

Symmetrie der DFT, Rechnung für Realteil bzw. Cosinus

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\left(\cos\left(n\,\pi + \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \qquad (33)$$

Eigenschaft des cos

$$\cos(n\,\pi+\alpha) = \cos(n\,\pi-\alpha) \qquad n\in\mathbb{Z} \qquad (34)$$

anwenden

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\left(\cos\left(n\,\pi - \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \qquad (35)$$

noch ein wenig umstellen zu

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\left(\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \qquad (36)$$

Symmetrie der DFT, Beweis Realteil

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{\left(\frac{N}{2}+l\right)}{N}\,n} \tag{37}$$

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left[\frac{N}{2}+l\right]\right) \tag{38}$$

$$\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot\cos\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left[\frac{N}{2}-l\right]\right) \tag{39}$$

w.z.b.w.

$$+\Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \overset{!}{=} +\Re\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{40}$$

Symmetrie der DFT, Rechnung für Imaginärteil bzw. Sinus

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot -\left(\sin\left(n\,\pi + \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \qquad (41)$$

Eigenschaft des sin

$$-\sin(n\,\pi+\alpha) = +\sin(n\,\pi-\alpha) \qquad k\in\mathbb{Z} \qquad (42)$$

anwenden

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot +\left(\sin\left(n\,\pi - \frac{2\,\pi\,n\,l}{N}\right)\right) \qquad (43)$$

noch ein wenig umstellen zu

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot +\left(\sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \qquad (44)$$

Symmetrie der DFT, Beweis Imaginärteil

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{\left(\frac{N}{2}+l\right)}{N}\,n} \tag{45}$$

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot -\sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left[\frac{N}{2}+l\right]\right) \tag{46}$$

$$\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot +\sin\left(\frac{2\,\pi\,n}{N}\cdot\left[\frac{N}{2}-l\right]\right) \tag{47}$$

w.z.b.w.

$$+\Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \overset{!}{=} -\Im\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{48}$$

Diskussion für l

Wir haben bewiesen, dass

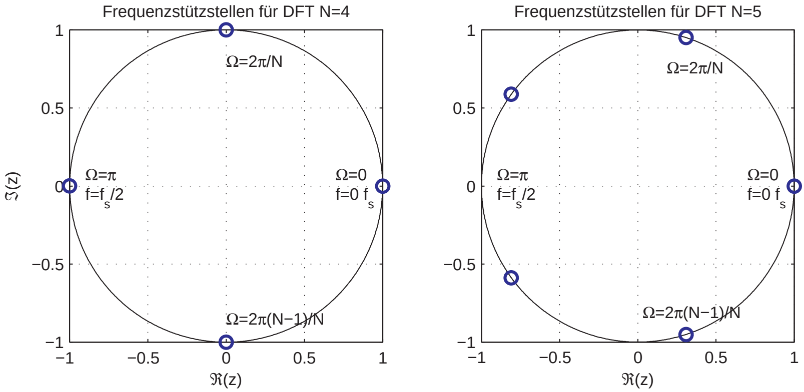
$$X[\frac{N}{2}+l] \stackrel{!}{=} X[\frac{N}{2}-l]^* \tag{49}$$

Da nun aber für die DFT gerade $k \in \mathbb{Z}$ definiert wurde, muss man für l mit $L \in \mathbb{Z}$ die Einschränkung

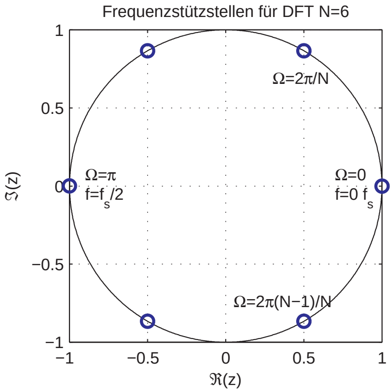
$$\begin{aligned} l &= 1 \cdot L \quad \text{für gerade } N \\ l &= \frac{1}{2} \cdot L \quad \text{für ungerade } N \end{aligned} \tag{50}$$

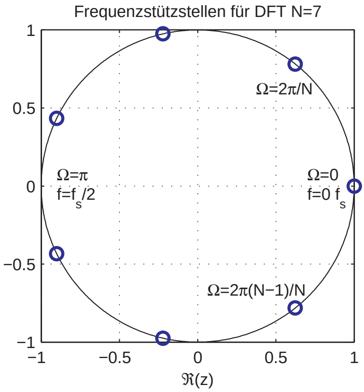
machen, damit man genau in $k \in \mathbb{Z}$ 'landet'.

Eigenschaften DFT

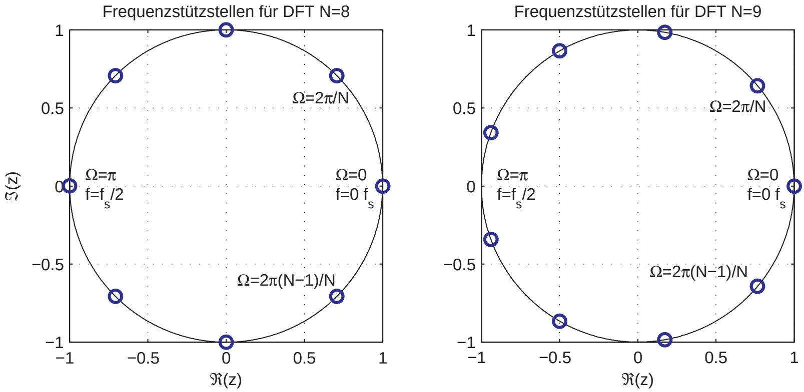


Eigenschaften DFT





Eigenschaften DFT



Einführung der Samplingfrequenz in die DFT 1

Die für die DFT genutzte diskrete komplex-harmonische Folge mit der Grundfrequenz $\Omega_0 = 2\,\pi/N$

$$x_k[n] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(k\,\Omega_0)\,n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} \tag{51}$$

könnte auch aus einem äquidistanten Abtastprozess entstanden sein. Mit dem sehr kleinen Abtasttakt[1] T_s bzw. der Samplingfrequenz $f_s = T_s^{-1}$ geht dann das zeitkontinuierliche Signal $x'(t)$ in die Folge $x'[n]$ über

$$x'_k(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(k\,\omega_0)\,t} \rightarrow x'_k[n\,T_s] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(k\,\omega_0)\,n\,T_s} \tag{52}$$

Dies lässt sich nun formal mit $x_k[n] = x'_k[n\,T_s]$ in die DFT einsetzen

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(k\,\omega_0)\,n\,T_s} \tag{53}$$

[1] eigtl. muss das Abtasttheorem eingehalten werden

Einführung der Samplingfrequenz in die DFT 2

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(k\,\omega_0)\,n\,T_s} \tag{54}$$

ein wenig umgeschrieben

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{k}{N}\,n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\;2\,\pi\,\frac{k\,f_0}{f_s}\,n} \tag{55}$$

man erkennt, dass für die Grundfrequenz der DFT, also die Frequenzauflösung der DFT, also den Abstand zweier Spektrallinien

$$f_0 = \frac{f_s}{N} \tag{56}$$

gilt. Für verschiedene $k \in \mathbb{Z}$ kann man die Frequenzen

$$f = k\,f_0 = k\,\frac{f_s}{N} \tag{57}$$

berechnen.

Einführung der Samplingfrequenz in die DFT 3

Für verschiedene $k \in \mathbb{Z}$ kann man die Frequenzen

$$f = k\, f_0 = k\, \frac{f_s}{N} \tag{58}$$

berechnen. Falls eine gerade Länge N für die DFT gilt, errechnet man für die Symmetrieachse $k = N/2$

$$f = k\, \frac{f_s}{N} = \frac{N}{2}\, \frac{f_s}{N} = \frac{f_s}{2} \tag{59}$$

genau die halbe Abtastfrequenz. Siehe auch nochmal die vorherigen Plots der Stützstellen auf dem Einheitskreis.

Redundanz DFT

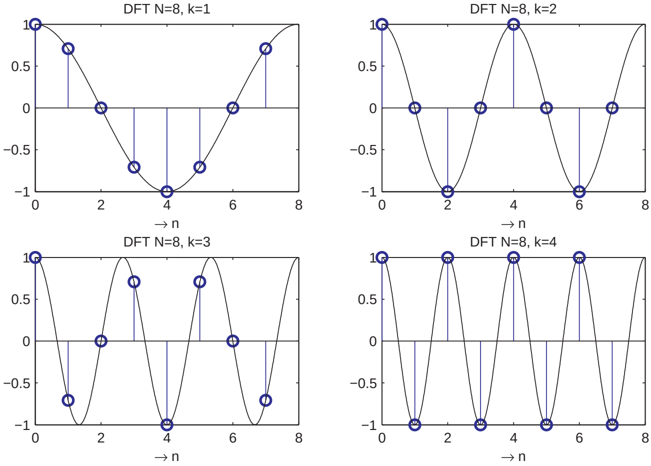
Durch die Periodizität von $X[k]$ allgemein und die aufgezeigten Symmetrien (Punktsymmetrie für Imaginärteil und Phase von $X[k]$, Axialsymmetrie für Realteil und Betrag von $X[k]$) für reelle $x[n]$! sind einige Informationen in $X[k]$ redundant. Zur Interpretation des Frequenzgehalts eines reellen Signals $x[n]$ stehen daher eigentlich in $X[k]$ 'nur'

$$\begin{aligned} M &= \frac{N}{2}+1 && \text{für gerade } N \\ M &= \frac{N+1}{2} && \text{für ungerade } N \end{aligned} \tag{60}$$

Stützstellen zur spektralen Erklärung von $x[n]$ zur Verfügung.
Die Benutzung der Stützstellen nur im oberen Halbkreises (inklusive $\Omega = 0$ und $\Omega = \pi$) in den vorherigen Grafiken veranschaulicht dies ganz nützlich.

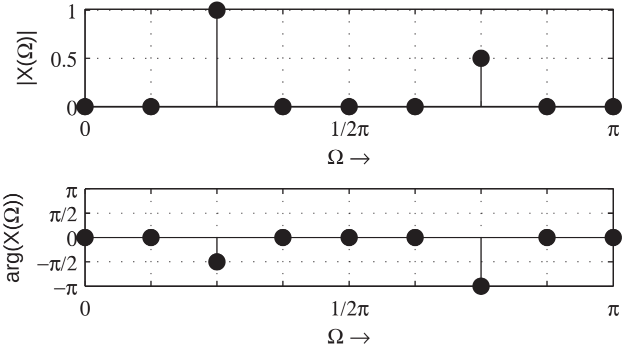
Stützstellen DFT

BSP: N=8, M=5, Frequenzen für nichtredundante Stützstellen (4 in der Grafik und nicht dargestellt X[k=0])



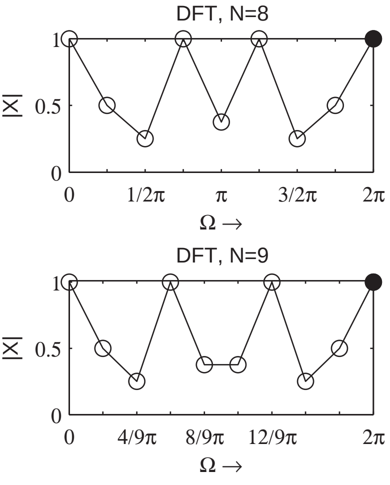
Eigenschaften DFT, Inverse DFT

Aufgabe: Gegeben sei folgender diskreter Betrags- und Phasenfrequenzgang (DFT) eines Abtastsignals:



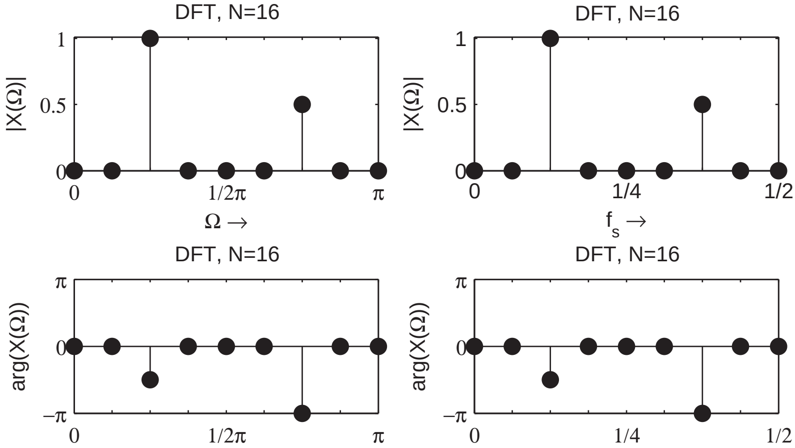
2.1 Erweitern Sie das Betrags- und Phasenspektrum derart, dass sich bei der Rücktransformation in den Zeitbereich ein reelles Signal ergibt.

Eigenschaften DFT, gerade/ungerade Ordnung



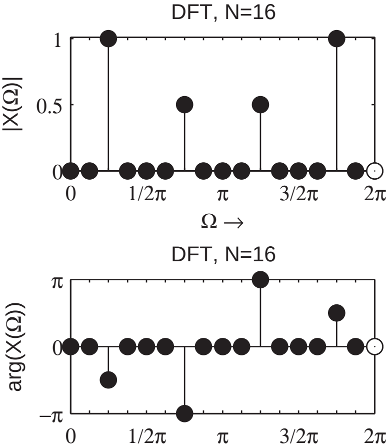
Gegebenes Spektrum

Erweitern auf $N = 16$, weil es für $\Omega = \pi$ eine und insgesamt $M = 9$ nichtredundante Stützstellen gibt, daraus folgt mit $2\,(M-1) = N$ $N = 16$



Ergänztes Spektrum

Axialsymmetrie beim Betrag, Punktsymmetrie bei der Phase, nur schwarze Punkte, der weiße Punkt ist schon die periodische Fortsetzung des DFT-Spektrums



2.2 Rekonstruieren Sie das Zeitsignal durch inverse Fouriertransformation. Nach wievielen Samples wiederholt sich das Signal periodisch?
IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\, 2\, \pi\, \frac{n}{N}\, k} \tag{61}$$

X[k] ist nur an den Stützstellen k=2,6,10,14 von Null verschieden

$$X[2] = 1 \cdot e^{\mathrm{j} -\pi/2} \qquad X[14] = 1 \cdot e^{\mathrm{j} +\pi/2} \tag{62}$$

$$X[6] = 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} -\pi} \qquad X[10] = 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} +\pi} \tag{63}$$

mit N=16 die Summe der IDFT ausschreiben

$$N\, x[n] = X[2]\, \mathrm{e}^{+2\, \pi\, \mathrm{j}\, \frac{2\, n}{16}} + X[6]\, \mathrm{e}^{+2\, \pi\, \mathrm{j}\, \frac{6\, n}{16}} + X[10]\, \mathrm{e}^{+2\, \pi\, \mathrm{j}\, \frac{10\, n}{16}} + X[14]\, \mathrm{e}^{+2\, \pi\, \mathrm{j}\, \frac{14\, n}{16}} \tag{64}$$

IDFT

$$N\,x[n] = X[2]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{2\,n}{N}} + X[6]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{6\,n}{N}} + X[10]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{10\,n}{N}} + X[14]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{14\,n}{N}} \tag{65}$$

Stützstellen einsetzen:

$$\begin{aligned} N\,x[n] &= 1 \cdot e^{\mathrm{j} - \pi/2}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{2\,n}{16}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} - \pi}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{6\,n}{16}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} + \pi}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{10\,n}{16}} + \\ &= 1 \cdot e^{\mathrm{j} + \pi/2}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{14\,n}{16}} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} N\,x[n] &= 1 \cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{5\,\pi\,n}{4}} + \\ &= 1 \cdot e^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{7\,\pi\,n}{4}} \end{aligned} \tag{67}$$

IDFT

mit

$$e^{j\,\Omega\,n} = e^{j\,\Omega\,n} \cdot \underbrace{e^{-j\,2\,\pi\,n}}_{=1} = e^{j(\,\Omega - 2\,\pi)\,n} \tag{68}$$

wird

$$\begin{aligned} N\,x[n] &= 1 \cdot e^{-j\,\pi/2}\,e^{j\,\frac{\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-j\,\pi}\,e^{j\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{j\,\pi}\,e^{j\,\frac{5\,\pi\,n}{4}} + \\ &= 1 \cdot e^{j\,\pi/2}\,e^{j\,\frac{7\,\pi\,n}{4}} \end{aligned} \tag{69}$$

zu

$$\begin{aligned} N\,x[n] &= 1 \cdot e^{-j\,\pi/2}\,e^{j\,\frac{\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-j\,\pi}\,e^{j\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{j\,\pi}\,e^{j\left(\frac{5\,\pi}{4} - 2\,\pi\right)n} + \\ &= 1 \cdot e^{j\,\pi/2}\,e^{j\left(\frac{7\,\pi}{4} - 2\,\pi\right)n} \end{aligned} \tag{70}$$

IDFT

weiterhin wird

$$
\begin{aligned}
N\,x[n] &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi\,n}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{5\,\pi}{4}-2\,\pi\right)n} + \\
&= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{7\,\pi}{4}-2\,\pi\right)n}
\end{aligned} \tag{71}
$$

dann vereinfacht zu

$$
\begin{aligned}
N\,x[n] &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{\pi\,n}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,n}{4}} + \\
&= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi\,n}{4}}
\end{aligned} \tag{72}
$$

IDFT

und damit

$$N\,x[n] = 1 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\left(\frac{\pi\,n}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} + \quad (73)$$
$$= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\left(\frac{3\,\pi\,n}{4} - \pi\right)} +$$
$$= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{3\,\pi\,n}{4} - \pi\right)} +$$
$$= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi\,n}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

mit

$$2\,\cos(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,a} \quad (74)$$

folgt dann

$$N\,x[n] = 2\,\cos\left(\frac{\pi\,n}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{4} - \pi\right) \quad (75)$$

Signalperiode

Die Signalperiode ist aus dem DFT-Spektrum ganz leicht ermittelt. Nachdem die tiefste Frequenz in $X[k=2]$ mit $N=16$ enthalten ist,

$$\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{n}{N}\,k} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{n}{16}\,2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,2\,\pi\,\frac{n}{8}} \tag{76}$$

gilt eine Signalperiode von 8 Samples.

Normierung auf Frequenzen

2.3 Skizzieren Sie das Zeitsignal innerhalb einer Periode und skalieren Sie die Zeitachse unter Berücksichtigung der Annahme, dass die oben gezeigten Frequenzstützstellen (Frequenzbins) einen Abstand von 500 Hz haben.

$$df = \frac{f_s}{N} \tag{77}$$

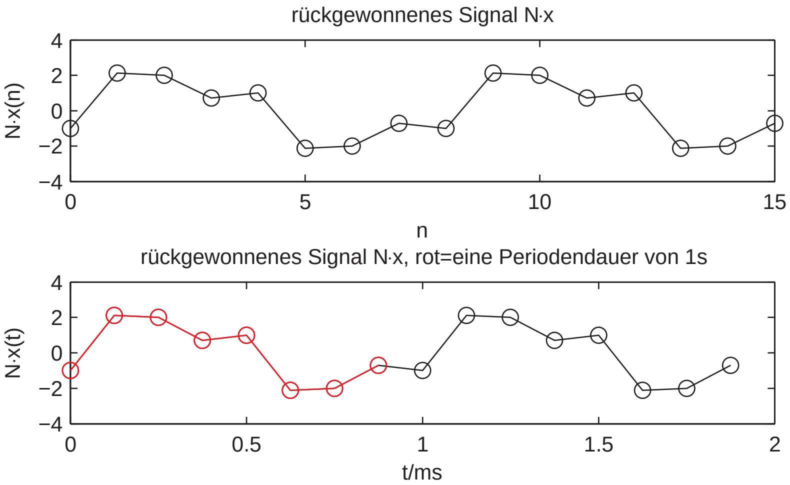
$$f_s = df\ N = \frac{1}{T_s} \tag{78}$$

$$f_s = 500\,Hz \cdot 16 = 8000\,Hz \tag{79}$$

$$T_s = 0.125\,ms \tag{80}$$

Die Signalperiode von 8 Samples kann somit auch als Zeit $8 \cdot T_s = 1ms$ ausgedrückt werden.

Rückgewonnenes Signal



FFT-Analyse eines wav-Files

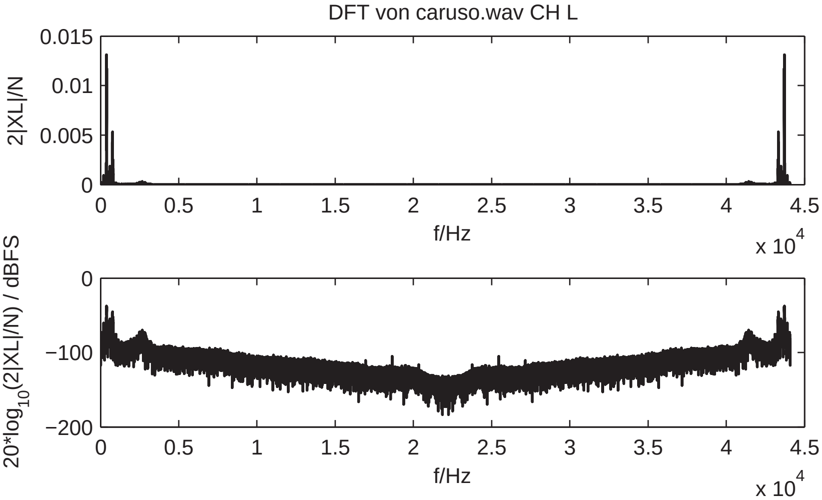
Aufgabe:

- **3.1** Lesen Sie das Audiofile „caruso.wav“ in Matlab ein und extrahieren Sie den linken Audiokanal als neuen Vektor xl.
- **3.2** Berechnen Sie daraus die diskrete Fouriertransformierte XL.
- **3.3** Zeichnen Sie das Betragsspektrum von XL und skalieren Sie die x-Achse auf eine Frequenz in Hz.
- **3.4** Betrachten Sie das Spektrum in einem Bereich zwischen 0 und 1000 Hz. Bei welcher Frequenz liegt der Grundton des Klangs ? Wie stark sind die ersten drei Obertöne in dB relativ zum Grundton ?

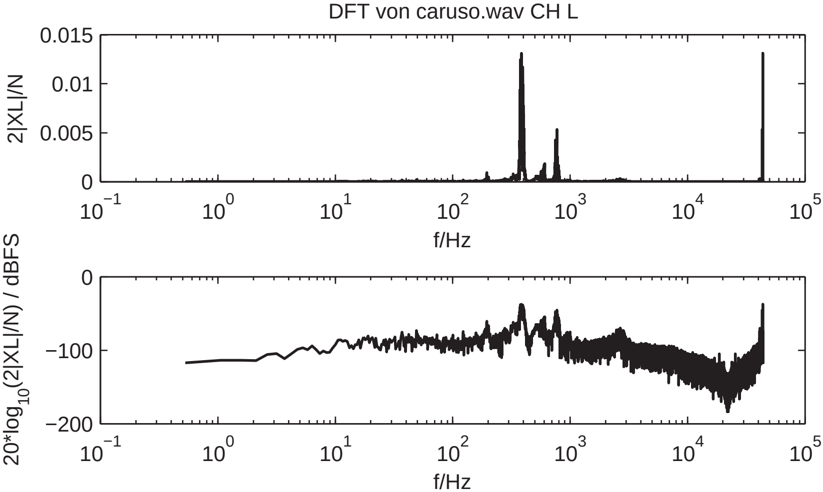
FFT-Analyse, Matlab

```
clear all; close all; clc;
%3.1
%fs=48000;
%x=2.5*cos(2*pi*2/48*[0:47])+3; x=x';     %Folge oder
%x=2.5*cos(2*pi*2000/fs*[0:47])+3; x=x'; %abgetastetes Signal oder
[x,fs,Nb]=wavread('caruso');
xl=x(:,1);          %nur linken Kanal einlesen
N=length(xl);       %Länge von xl -> wird DFT-Länge
%3.2
XL=fft(xl);         %FFT anwenden
%3.3
df=fs/N;            %Frequenzauflösung der fft, f=k*fs/N für k=1,
f=fs/N*[0:N-1];     %f=0:df:fs-df; Frequenzvektor von DC bis 'kurz' vor Abtastfrequenz
XLa=abs(XL)/N*2; %Betrag der FFT und normieren auf Sinusamplituden
XLa(1)=XLa(1)/2; %DC richtig normieren (wg. kein 2. konj. kompl. Wert)
if mod(N,2)==0   %nur für gerade N!
XLa(N/2+1)=XLa(N/2+1)/2; %fs/2 richtig normieren (dito)
end
figure              %kompletter Amplitudenfrequenzgang
subplot(2,1,1)      %log. f-Achse, lineare Amplitude
semilogx(f,XLa,'-k','LineWidth',2),xlabel('f/Hz'),ylabel('2|XL|/N'),title('DFT␣von␣caruso.wav␣CH␣L')
subplot(2,1,2)      %log. f-Achse, Pegel
semilogx(f,20*log10(XLa),'-k','LineWidth',2),xlabel('f/Hz'),ylabel('20*log␣1␣0(2|XL|/N)␣/␣dBFS')
%3.4
figure              %amplitudenfrequenzgang nur von 0Hz bis 1000Hz
subplot(2,1,1)      %log. f-Achse, lineare Amplitude
semilogx(f,XLa),xlabel('f/Hz'),ylabel('2|XL|/N'),axis([0 1000 0 max(XLa)]),
title('DFT␣von␣caruso.wav␣CH␣L')
subplot(2,1,2)   %log. f-Achse, Pegel
semilogx(f,20*log10(XLa)),xlabel('f/Hz'),ylabel('20*log␣1␣0(2|XL|/N)␣/␣dBFS'),
axis([0 1000 -100 0])
%Der Grundton liegt bei ca. 200 Hz und hat eine Amplitude von ca. -60 dBFS.
%Die ersten Obertöne liegen bei ca. 400, 600 und 800 Hz und haben in etwa
%die Amplituden -37 dBFS, -54 dBFS und -45 dBFS.
```

Amplitudenspektrum „caruso.wav“



Amplitudenspektrum „caruso.wav“



Grundton und Harmonische „caruso.wav“