



Einführung in die digitale Signalverarbeitung - Übung (3135 L 372) - WS10/11
FG Audiokommunikation, Institut für Sprache und Kommunikation, TU Berlin
Prof. S. Weinzierl, Frank Schultz, Thanassis Lykartsis

Übung 7, 16.12.2010: Analyse und Interpretation von LTI-Systemen - Pole, Nullstellen, Amplitudengang, Phasengang, Gruppenlaufzeit, Impulsantwort

Musterlösung¹

1 Aufgabe:

Gegeben ist die Differenzgleichung für rechtsseitige reelle Eingangs- und Ausgangssignale

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n - 1]) \quad \text{für } n \geq 0$$

mit $n \in \mathbb{Z}$.

1.1

Bestimmen Sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $H(z)$.

Lösung:

Wegen

$$\delta[n - m] \longleftrightarrow z^{-m}$$

und der Forderung rechtsseitiger Signale kann die Z-Transformierte der Differenzgleichung direkt aufgeschrieben und in Form von $H(z)$ gebracht werden.

$$Y(z) = \frac{1}{2} (X(z) + X(z) \cdot z^{-1}) = X(z) \cdot \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

1.2

Bestimmen Sie Pole und Nullstellen von $H(z)$ und zeichnen Sie diese in ein Pol-Nullstellendiagramm.

Lösung:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + 1}{z} \right)$$
$$z_N = -1 \quad z_P = 0$$

Diagramm siehe Abb. 1 Das Pol-Nullstellendiagramm ist für den erfahrenen Signalverarbeiter

¹Frank Schultz, 24. Dezember 2010, 11:58

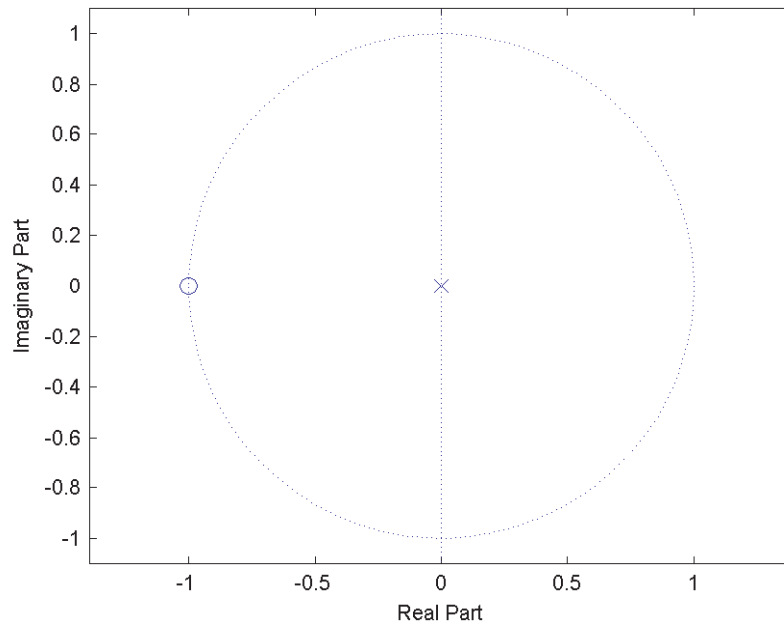


Abbildung 1: Pol-Nullstellendiagramm

ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Analyse von Systemen, allerdings, wenn man sich in die Materie neu reindenkt evtl. noch sehr unanschaulich. Daher könnte ein erweitertes Pol-Nullstellendiagramm hilfreich sein, in dem die ganze Z -Ebene (Real- und Imaginärteile der komplexen Zahl z) als Isobarenplot den dB-Betrag von $H(z)$ farbig codiert darstellt, wie in Abb. 2,3,4. Wenn man nun den oberen Halbkreis von $z = 1$ bis $z = -1$ in Abb. 4 durchläuft, erhält man eine ziemlich konkrete Vorstellung über das Amplitudenverhalten von $H(z)$ bei den unterschiedlichen Frequenzen, vor allem die Dämpfung um abgelesene 3dB bei $z = j$ (entspricht $f_s/4$) sollte man für Nachfolgendes im Kopf behalten...

1.3

Bestimmen Sie analytisch den Amplitudenfrequenzgang $|H(z)|$ und stellen Sie diesen grafisch dar.

Lösung:

Auswertung der Z -Transformierten auf dem Einheitskreis ergibt den Amplitudenfrequenzgang.

$$z = 1 \cdot e^{j\Omega}$$

DTFT vs. Z -Transformation:

$$H(\Omega) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\Omega n}$$

$$H(z) \propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \underset{z=e^{j\Omega}}{=} H(\Omega)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

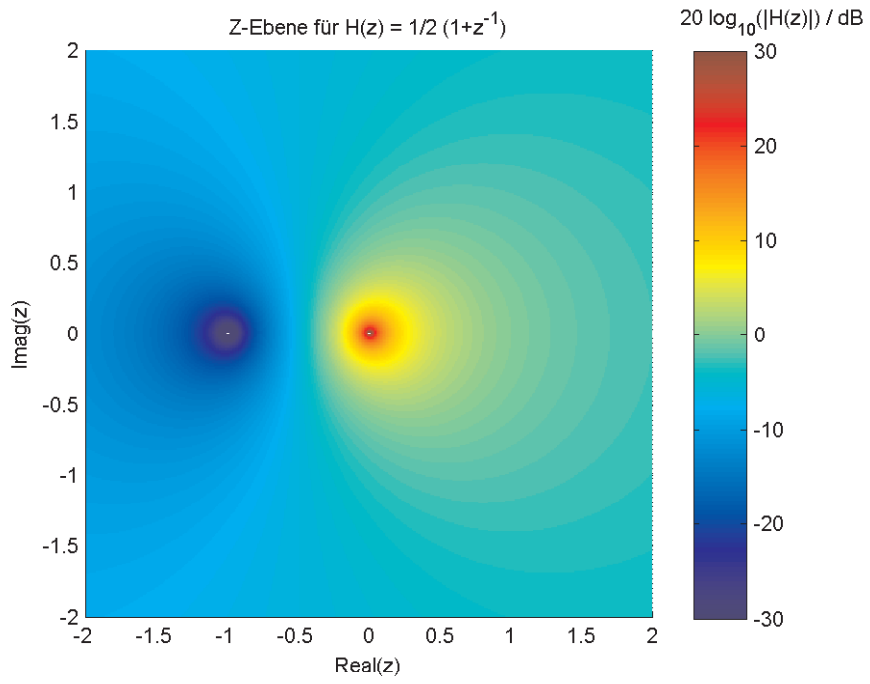


Abbildung 2: Z-Ebene

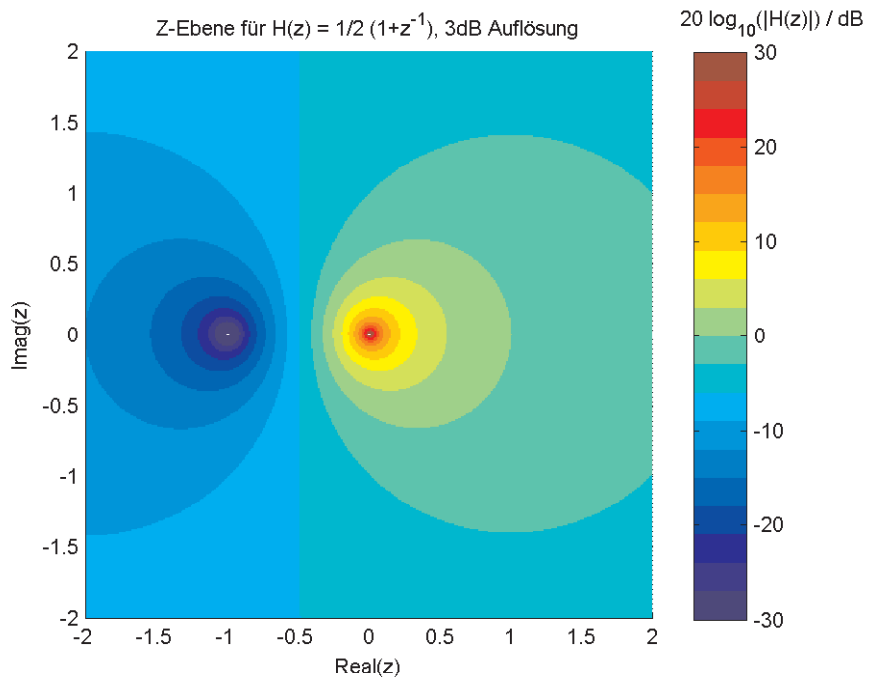


Abbildung 3: Z-Ebene

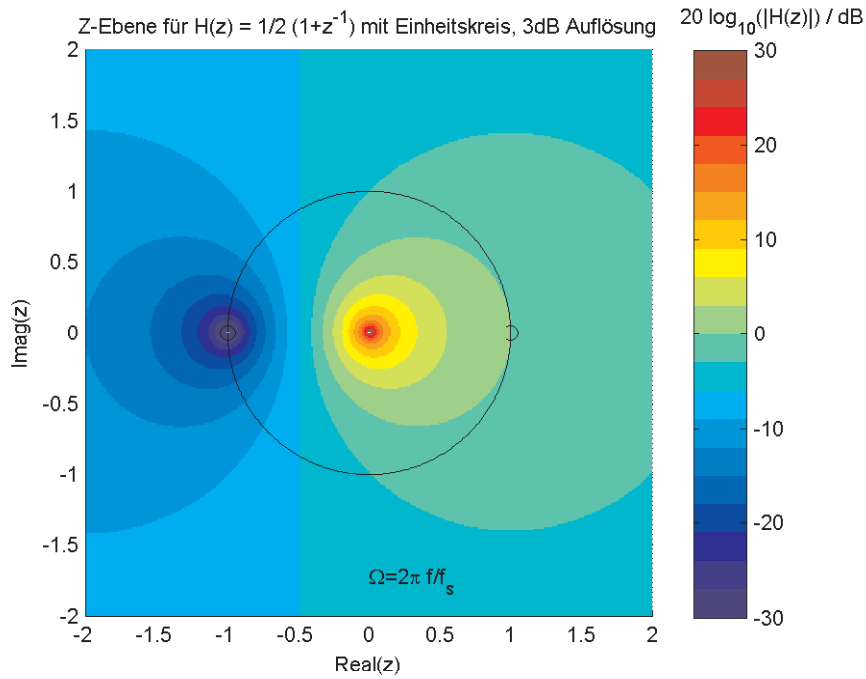


Abbildung 4: Z-Ebene

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\Omega})$$

Eulersche Identität:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi) \quad e^{-j\phi} = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$$

und daraus folgend:

$$\cos(\phi) = \frac{e^{+j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{+j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

Angewandt auf unsere Problemstellung folgt für die DTFT:

$$H(\Omega) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\Omega) - j \sin(\Omega))$$

Real- und Imaginärteil trennen:

$$\Re(H(\Omega)) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\Omega))$$

$$\Im(H(\Omega)) = \frac{1}{2} (-\sin(\Omega))$$

Betrag der komplexen Zahl anwenden:

$$|H(\Omega)|^2 = \Re(H(\Omega))^2 + \Im(H(\Omega))^2$$

$$|H(\Omega)|^2 = \left[\frac{1}{2} (1 + \cos(\Omega)) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (-\sin(\Omega)) \right]^2$$

binomische Formel anwenden:

$$|H(\Omega)|^2 = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cos(\Omega) + \frac{1}{4} \cos^2(\Omega)}_{\Re(H(\Omega))^2} + \underbrace{\frac{1}{4} \sin^2(\Omega)}_{\Im(H(\Omega))^2}$$

Vereinfachung mittels trigonometrischen Pythagoras':

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cos(\Omega) + \underbrace{\frac{1}{4} \cos^2(\Omega) + \frac{1}{4} \sin^2(\Omega)}_{1/4}$$

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\Omega) = \frac{1}{2} \cos(\Omega) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos(\Omega) + 1) \quad (1)$$

Vereinfachung mittels Cosinus-Euleridentität:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 2)$$

und einer Erweiterung mit dem Ziel der Darstellung als binomische Formel:

$$\begin{aligned} |H(\Omega)|^2 &= \frac{1}{4} \left(e^{j\Omega \cdot \frac{2}{2}} + e^{-j\Omega \cdot \frac{2}{2}} + 2 \cdot e^{+j\frac{\Omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right) \\ |H(\Omega)|^2 &= \frac{1}{4} \left(\left[\underbrace{e^{+j\frac{\Omega}{2}}}_a \right]^2 + \left[\underbrace{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}_b \right]^2 + 2 \cdot e^{+j\frac{\Omega}{2}} \cdot e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right) \\ &\quad (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\ |H(\Omega)|^2 &= \frac{1}{4} \left(e^{+j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}} \right)^2 \\ |H(\Omega)|^2 &= \left(\frac{e^{+j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \right)^2 = \cos^2 \left(\frac{\Omega}{2} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

Reelles Spektrum erfordert Betrag des Cosinus:

$$\underline{\underline{|H(\Omega)| = \left| \cos \left(\frac{\Omega}{2} \right) \right|}}$$

Grafische Darstellung in Abb. 5. Für $\Omega = \pi/2$ erhält man $|H(\Omega)| = \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$. Dies ergibt $20 \log_{10}(|H(\Omega)|) \approx -3.01\text{dB}$, wie auch schon aus Abb. 4 geschätzt zu entnehmen war. Für $\Omega = \pi$ erhält man $|H(\Omega)| = \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = 0$. Dies ergibt $20 \log_{10}(|H(\Omega)|) = -\infty\text{dB}$, hier macht sich die direkt auf dem Einheitskreis sitzende Nullstelle in ihrer vollen Wirkung - nämlich komplette Auslöschung des Signals - bemerkbar. Allgemein kann man dem System $H(z)$ einfache Tiefpasscharakteristik zuschreiben.

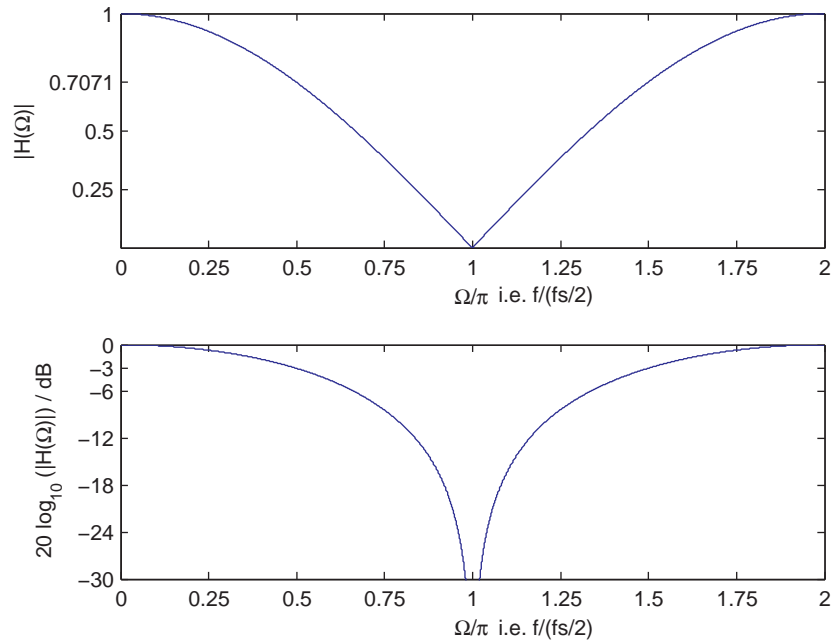


Abbildung 5: Amplitudenfrequenzgang für $H(\Omega)$

1.4

Bestimmen Sie analytisch den Phasenfrequenzgang $\angle H(\Omega)$ und den Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau(\Omega)$ und stellen Sie diese grafisch dar.

Lösung:

Definition Phase:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\frac{\Im(H(\Omega))}{\Re(H(\Omega))}\right)$$

Einsetzen, wobei hier oben gemachte Erkenntnisse bzgl. Cosinus-Additionstheoremen (vgl. Glg. 2 und 1) benutzt werden:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}(-\sin(\Omega))}{\frac{1}{2}(1 + \cos(\Omega))}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin(\Omega)}{\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)$$

Schauen wir uns das Argument der arctan-Funktion, im folgenden x , mit dem Ziel der Vereinfachung genauer an:

$$x = \frac{-\frac{1}{2}\sin(\Omega)}{\cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \quad \angle H(\Omega) = \arctan(x)$$

Zunächst wieder Sinus- und Cosinusidentitäten einsetzen und kürzen:

$$x = \frac{-\frac{1}{4} \frac{e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j}}{\frac{1}{4} (e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^2} = \frac{-\frac{e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j}}{(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^2}$$

Danach so erweitern, dass eine Cosinus-Funktion geschrieben werden kann:

$$x = \frac{-\frac{e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j}}{(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^2} \cdot \frac{(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^{-1}}{(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^{-1}} = \frac{-\frac{e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j}}{(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})} \cdot (e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})^{-1}$$

Umformen und Umstellen, so dass der erste Bruch nicht mehr 'angefasst' wird:

$$x = \frac{-\frac{e^{+j\Omega} - e^{-j\Omega}}{j}}{2 \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \left(e^{+j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}\right)^{-1}$$

$$x = \frac{-1}{2j \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}}$$

Jetzt mit der Intention im Zähler irgendwie eine reine Sinus-Funktion über Euler zu erhalten, erweitern:

$$x = \frac{-1}{2j \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}} \cdot \frac{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$

Anwenden dieser binomischen Formel, zu finden im Nenner,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

vereinfacht gewaltig:

$$x = \frac{-1}{2j \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot \frac{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}}{e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}} \cdot \left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right)$$

und bringt schlußendlich ein einfaches Ergebnis zu Tage (Punktsymmetrie des Tangens beachten $\tan(x) = \tan(-x)$):

$$x = -\frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\Omega}{2}\right)$$

Nun wieder vom Ursprung der Rechnung $\angle H(\Omega) = \arctan(x)$ ausgehend:

$$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\Omega}{2}\right)\right)$$

Da sich die Funktionen $\tan(x)$ und $\arctan(x)$ nur zwischen $-\pi/2 < x < +\pi/2$ bijektiv verhalten, d.h. dort exakte Umkehrfunktionen existieren und damit $x = \tan(\arctan(x))$ und $x = \arctan(\tan(x))$ gilt, muss bei der allgemeinen Diskussion und Vereinfachung der Phase eine Fallunterscheidung erfolgen. D.h. falls für das Argument $-\pi/2 < \Omega/2 < \pi/2$ und damit $-\pi < \Omega < \pi$ gilt, kann zunächst einfach geschrieben werden

$$\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \quad -\pi < \Omega < +\pi$$

Für $\Omega = \pm\pi$ und deren 2π -periodischen Fortsetzungen entstehen allerdings Sprungstellen im Phasenverlauf, die nach Quadranten-, Werte- und Definitionsüberlegungen ($\text{atan2}(x,y)$) bzgl. der trigonometrischen Funktionen in folgende Gleichung münden:

$$\angle H(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \pm k\pi \quad (2k - 1)\pi \leq \Omega < (2k + 1)\pi$$

Definition Gruppenlaufzeit:

$$\tau = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}$$

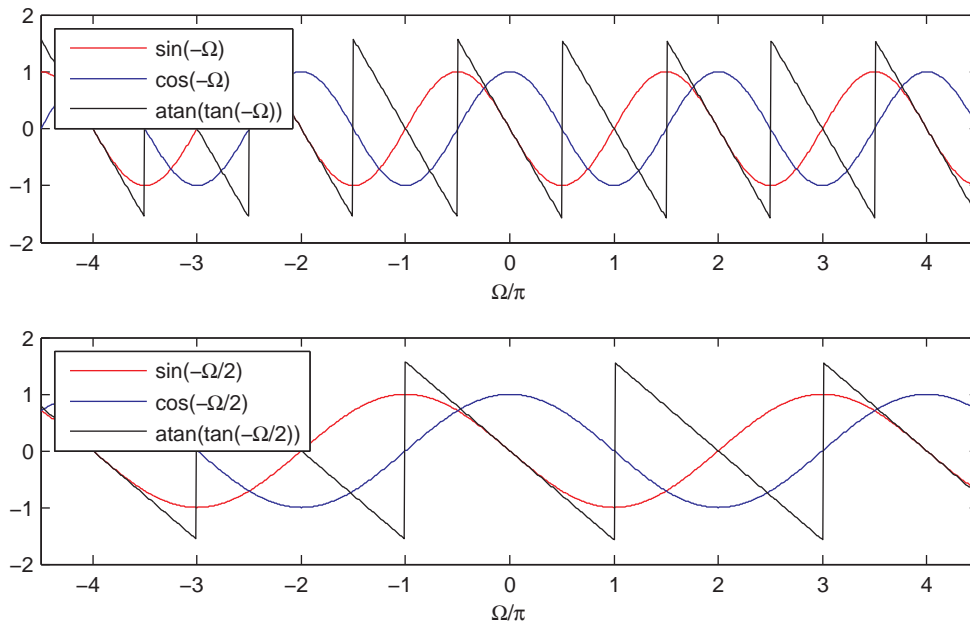


Abbildung 6:

Wir wählen zur einfacheren Vorstellung den physikalischen Bezug zur Samplingfrequenz:

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{\omega}{f_s}$$

Ergibt:

$$\angle H(\omega) = -\frac{\omega}{2f_s}$$

Einsetzen und Differentiation ausführen (außer bei Unstetigkeiten):

$$\tau = -\frac{d\left(-\frac{\omega}{2f_s}\right)}{d\omega} = \frac{1}{2f_s}$$

Ergebnis:

$$\underline{\underline{\tau = \frac{T_s}{2}}} \quad (2k-1)\pi \leq \Omega < (2k+1)\pi$$

Die Gruppenlaufzeit ist konstant und positiv über die Frequenz (außer bei Unstetigkeiten bei Phasensprungstellen), dies ergibt sich aus der negativen Ableitung (Anstieg) eines linearen Phasenverlaufs. Die Gruppenlaufzeit beträgt 1/2 Sample (für $f_s=48000$ Hz wären dies ca. $10\mu s$) für alle Frequenzgruppen. Abb. 7 zeigt Phase und Gruppenlaufzeit, der Phasensprung bei $\Omega = \pi$ bewirkt die Unstetigkeit in der Gruppenlaufzeit, die an dieser Stellen nicht definiert und daher mit einem Punkt markiert ist.

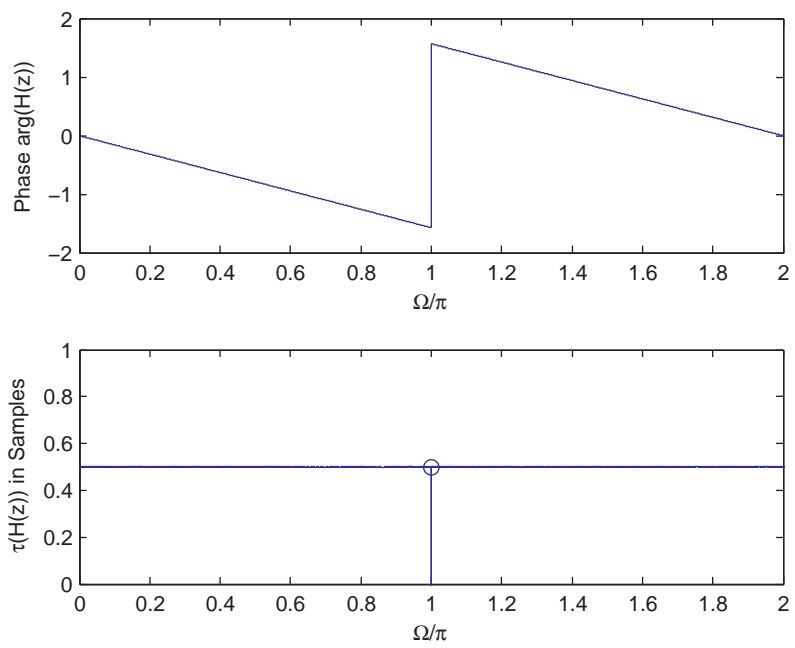


Abbildung 7: Phasen- und Gruppenlaufzeitfrequenzgang für $H(\Omega)$