Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

5. Aufgabenblatt – Musterlösung

1. Fourier-Transformation (3-Eigenschaften)

Der Frequenzgang eines LTI-Systems lautet

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{4}}, -\pi < \Omega \leq \pi$$

Bestimmen sie die Ausgangsfolge y[n] des Systems, wenn die Eingangsfolge x[n]=cos(5πn/8) ist.

(*Aufgabe 2.52, S. 125 in* [Os04], *geringfügig modifiziert*)

Beim Betrachten des Frequenzganges des Systems ist es ersichtlich, dass es alle Frequenzen mit gleichem Betrag zulässt, da für den exponentiellen Zeiger der allgemeinen Form $R \cdot e^{j\Omega n}$ in diesem Fall *R*=1 gilt. Das heißt, man erwartet auch bei der Ausgangsfolge y[n] eine Folge der gleichen Form, wie die Eingangsfolge x[n], ohne weiteren Skalierungsfaktor. Weiterhin für die Phase ist zu erwarten, dass da irgendwelche Änderung vorliegen wird, wegen des Filterns der Eingangsfolge durch das System.

Es wird erst die Eingangsfolge x[n] = cos(5πn/8) Fourier-Transformiert, mithilfe von Tabelle 2.3, bei [Os04]

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \frac{5\pi}{8} + 2\pi k) + \delta(\Omega + \frac{5\pi}{8} + 2\pi k)] \\ &= \delta(\Omega - \frac{5\pi}{8}) + \delta(\Omega + \frac{5\pi}{8}), -\pi < \Omega \leq \pi \end{aligned}$$

Nach Multiplikation im Frequenzbereich mit der Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$Y(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{4}} \delta(\Omega - \frac{5\pi}{8}) + e^{-j\frac{\Omega}{4}} \delta(\Omega + \frac{5\pi}{8}), -\pi < \Omega \leq \pi$$

Und beim Einsetzen von 5π/8 bzw. -5π/8 für Ω wird die letzte Gleichung zu:

$$Y(e^{j\Omega}) = e^{-j\frac{5\pi}{32}} \delta(\Omega - \frac{5\pi}{8}) + e^{j\frac{5\pi}{32}} \delta(\Omega + \frac{5\pi}{8}), -\pi < \Omega \leq \pi$$

Mit Bezug auf Tabelle 2.3, erkennt man, dass die letzte Gleichung die Fourier-Transformation einer Cosinusfunktion ist:

$$\cos\left(\frac{5\pi n}{8} - \frac{5\pi}{32}\right) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\frac{5\pi}{32}}\delta\left(\Omega - \frac{5\pi}{8}\right) + e^{j\frac{5\pi}{32}}\delta\left(\Omega + \frac{5\pi}{8}\right)$$

Die resultierende Ausgangsfolge ist also:

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\cdot\left(n - \frac{1}{4}\right)\right), \text{ für alle } n$$

Es ist daraus ersichtlich, dass die originale Cosinusfolge einfach ein viertel Sample später aus dem System kommt. Dieses Bekenntnis kann man auch anders ausdrucken: Der Nullphasenwinkel der Cosinusfolge ist um $\phi = \Omega_0 \cdot \frac{-1}{4} = \frac{5\pi}{8}\cdot\frac{-1}{4} = \frac{-5\pi}{32}$ Radiante geändert worden.

2. z-Transformation (Einführung-Konvergenzbereich)

i) Betrachten Sie die Signale $x_1[n] = a^n u[n], x_2[n] = -a^n u[-n-1]$. Wie sieht ihre z-Transformation aus, und was für einen Konvergenzbereich hat er? Wie lassen sich diese Schlüsse ändern, wenn man Systeme statt Signale betrachtet, die aber die gleiche z-transformierte wie $x_1[n], x_2[n]$ besitzen?

ii) Es seien die Folgen

$$x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n],$$
$$x_4[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

gegeben. Wie sieht jeweils die z-transformierte und der Konvergenzbereich aus? Benutzen sie die Ergebnisse aus i).

(*Beispiele 3.1 – 3.5, S. 143 - 149 in* [Os04], *modifiziert*)

Lösung:

i) Man betrachte zuerst das Signal $x_1[n] = a^n u[n]$. Es handelt sich um eine **rechtsseitige Folge**, da dieses Signal ungleich 0 nur für $n \geq 0$ ist. Seine z-Transformation bekommt man aus der Gleichung:

$$X_1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n u[n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a\cdot z^{-1})^n$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} |a \cdot z^{-1}|^n$ kleiner unendlich sein muss, damit die z-Transformation konvergieren kann. Somit ergibt sich: $|a \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |a| < |z|$. Innerhalb dieses Konvergenzbereichs, also für alle *z* in der komplexen Ebene, die sich außerhalb des Kreises mit Radius *α* befinden, konvergiert die z-Transformation zu (Ergebnis kommt wieder mit Nutzung der Formel für die Summer der Terme einer geometrischen Reihe):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \overset{\cdot z}{\underset{\cdot z}{=}} \frac{z}{z - a} \quad \text{mit } |a| < |z|$$

Man betrachtet zunächst das Signal $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$, das eine **linksseitige Folge** darstellt, die von -1 nach minus unendlich läuft. Ahnlicherweise erhält man für die z-Transformerte:

$$X_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} \cdot z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} \cdot z)^n$$
$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} \cdot z} = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Und für den Konvergenzbereich entsprechend:

$$|a^{-1} \cdot z| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

Das heißt, hier konvergiert die z-Transformation für alle *z* innerhalb des Kreises mit Radius *α*. Die entsprechende Fourier-Transformierte bekommt man in beiden Fälle für *α*=1. Das heißt, die Fourier-Transformierte ist der Spezialfall der z-Transformierte für *α*=1, oder anders gesagt, ergibt sich wenn man die z-Transformierte auf dem Einheitskreis auf der komplexen Ebene berechnet. Damit die Fourier-Transformierte konvergieren kann, muss der Konvergenzbereich also den Einheitskreis einschließen. Daraus kann man prüfen, für welche Werte von *α* dies passiert.

Wichtig zu bemerken ist, dass die 2 Zeitsignale genau den gleichen algebraischen Ausdruck für die z-Transformierte besitzen, obwohl sie 2 unterschiedlichen Folgen darstellen. Wo sie sich unterscheiden, ist der Konvergenzbereich. Deshalb muss man immer mit der z-transformierten auch ihren Konvergenzbereich angeben, wenn es erforderlich ist, zurück auf die ursprungliche Folge eindeutig zu schließen.

Diese z-Transformation kann auch eine Übertragungfunktion eines Systems darstellen. Im Fall von Systemen statt Signalen muss man aber meistens davon ausgehen, dass sie kausal (und meistens auch stabil) sind, deshalb ist es schon auch ohne Kenntnis über den Konvergenzbereich zu haben möglich die ursprungliche Folge, von der die z-Transformation stammt, eindeutig zu bestimmen.

ii) Für die Folge $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]$ berechnet man die z-Transformation.

$$X_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{(\frac{1}{2})^n u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]\} \cdot z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n u[n] \cdot z^{-n} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (-\frac{1}{3})^n u[n] \cdot z^{-n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2} \cdot z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-1}{3} \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2(1-\frac{1}{12}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cdot(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{2(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})\cdot(z+\frac{1}{3})}$$

Aus der Berechnung lässt sich ablesen, dass beide Summen konvergieren muss, damit die z-Transformation konvergiert. Es muss also $|\frac{1}{2} \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{2}| < |z|$ und $|-\frac{1}{3} \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{3}| < |z|$. Von den letzten Gleichungen ist leicht zu verstehen, dass es eigentlich $|\frac{1}{2}| < |z|$ gelten muss, da sich die zwei Konvergenzbereiche überlappen.

Ähnlich für die Folge $x_4[n] = (-\frac{1}{3})^n u[n] - (\frac{1}{2})^n u[-n-1]$, mit Nutzung der Ergebnisse für die linksseitige Folge $x_2[n] = -a^n u[-n-1]$ aus i) erhält man schließlich:

$$X_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-1}{3} \cdot z^{-1})^n + (1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (2 \cdot z)^n) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{2(1-\frac{1}{12}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cdot(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{2(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})\cdot(z+\frac{1}{3})}$$

Wie erwartet ist der Ausdruck für $X_4(z)$ der gleich wie für $X_3(z)$. Trotzdem gilt es hier für den Konvergenzbereich wiederum, dass $|-\frac{1}{3} \cdot z^{-1}| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{3}| < |z|$, da der Teil $(-\frac{1}{3})^n u[n]$ in den zwei Folgen gleich bleibt. Nichtsdestotrotz ist hier der Konvergenzbereich für den anderen Summanden $= -(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$, wie von i) bekannt, $|z| < |\frac{1}{2}|$. Die Überlappung dieser 2 Konvergenzbereich ergibt das Endergebnis von $|\frac{1}{3}| < |z| < |\frac{1}{2}|$, was einen Ring darstellt. Das ergibt sich daraus, dass es hier um eine **beidseitige Folge** handelt.

LITERATUR:

[Os04] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck: **Zeitdiskrete Signalverarbeitung**, 2., überarbeitete Aufl., Pearson, 2004