Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

4. Aufgabenblatt - Musterlösung

1. Fourier-Reihe

Gegeben sei das Signal x(t) = sinω_0t.

Geben Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe an. Benutzen Sie dafür nicht die Analysegleichung der Fourierentwicklung, sondern stellen Sie die Sinusfunktion nach der Euler-Gleichung als Linearkombination komplexer Exponentialfuntionen dar und identifizieren Sie darin die Fourier-Koeffizienten. Geben Sie die Koeffizienten in einerseits in karthesischer Form und andererseits nach Betrag und Phase an.

Euler'sche Gleichungen:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$
$$e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j\sin(\alpha)$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen ergeben sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}\right)$$
$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right)$$

Demnach ist:

$$x(t) = \sin(\Omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}\right)$$
$$= \frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\Omega_0 t}$$

Die Synthesegleichung der Fourieranalyse lautet:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$c_1 = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2} = 0 + j\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2} = 0 + j\left(\frac{1}{2}\right)$$

Nach Betrag und Phase:

$$|c_1| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\angle(c_1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$|c_2| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\angle(c_2) = \frac{\pi}{2}$$

2. Fourier-Transformation (1)

a. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte (kurz: FT) der Folge

$$r[n]=1, \quad 0 \leqslant n \leqslant M$$

$$r[n]=0, \qquad \mathit{sonst.}$$

b. Gegeben sei die Folge

$$w[n]=\frac{1}{2}[1-\cos(2\pi\frac{n}{M})], \quad 0 \leqslant n \leqslant M$$

$$w[n]=0, \qquad \mathit{sonst.}$$

i. Berechnen Sie $W(e^{j\Omega})$, die FT von $w[n]$, und drucken Sie sie auch durch $R(e^{j\Omega})$, die FT von $r[n]$ aus.

ii. Plotten Sie die Ergebnisse in Matlab

(*Aufgabe 2.17, S. 114 in* [Os04], *geringfügig modifiziert*) a)

i) Ausgehend von der Analysegleichung der Fourier-Transformation

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

erhält man

$$R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} r[n] \cdot e^{-j\Omega n} ,$$

wobei $R(e^{j\Omega})$ die Fourier-transformierte der Folge $r[n]$ ist. Da die Folge nur für $0 \leqslant n \leqslant M$ ungleich null (und für alle n gleich 1) ist, ist sie auch absolut summierbar und deshalb konvergierend. Dann lässt sich $R(e^{j\Omega})$ so ausdrucken:

$$R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M} 1 \cdot e^{-j\Omega n}$$

Hier handelt es sich um eine geometrische Reihe mit M + 1 Termen, die wie folgt dargestellt werden kann: (Die Formel kann in z. B. Formelsammlung Bronstein Taschenbuch der Mathematik gefunden werden)

$$R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j\Omega(M+1)}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega(\mathrm{M}+1)/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{e^{j\Omega((M+1)/2)} - e^{-j\Omega((M+1)/2)}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}$$

$$= \frac{e^{-j\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}} \frac{e^{j\Omega((M+1)/2)} - e^{-j\Omega((M+1)/2)}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}} e^{-j\Omega M/2} = \frac{2j \cdot \sin[\Omega(\frac{M+1}{2})]}{2j \cdot \sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega M/2} = \frac{\sin[\Omega(\frac{M+1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-j\Omega M/2}$$

ii) Für die Folge $r[n]$ kann man feststellen, dass sie eine verschobene Version der Folge

$$r'[n]=1, \quad -\frac{M}{2} \leqslant n \leqslant \frac{M}{2}$$

$$r'[n]=0, \quad sonst.$$

ist, und zwar um $\frac{M}{2}$ Werte, wobei $r'[n]$ symmetrisch zur y-Achse ist. Also gilt

$$r'[n]=r[n+\frac{M}{2}] \text{ und } r[n]=r'[n-\frac{M}{2}]$$

Deshalb kann man die FT von $r'[n]$ berechnen. Die Lösung wird in diesem Fall einen Faktor der Form $e^{-j\Omega M/2}$ enthalten, da eine Verschiebung einer Folge x[k] um -k Werte im Zeitbereich Multiplikation mit dem Faktor $e^{-j\Omega k}$ im Frequenzbereich bedeutet (siehe Theorem 2., S. 96, Kapitel 2.9 in [Os04]). Das lässt sich folgendermaßen beweisen:

$$F\{r[n+(\frac{M}{2})]\} = F\{r[n]\} \cdot e^{j\Omega \frac{M}{2}}, \quad -\frac{M}{2} \leqslant n \leqslant \frac{M}{2}$$

$$\Rightarrow F\{r[n]\} = F\{r[n+(\frac{M}{2})]\} \cdot e^{-j\Omega \frac{M}{2}}, \quad 0 \leqslant n \leqslant M$$

Man kann also schreiben:

$$R'(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M/2}^{M/2} 1 \cdot e^{-j\Omega n}$$

Setzt man $m = n + \frac{M}{2}$, ergibt sich dann:

$$R'(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^{M} 1 \cdot e^{-j\Omega (m - \frac{M}{2})} = e^{j\Omega \frac{M}{2}} \cdot \sum_{m=0}^{M} e^{-j\Omega m}$$

Die Summe ist in diesem Fall genau die gleiche, die in i) berechnet wurde. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses bekommt man:

$$R'(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[\Omega (\frac{M+1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \cdot e^{-j\Omega M/2} \cdot e^{j\Omega M/2} = \frac{\sin[\Omega (\frac{M+1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

Schließlich folgt daraus, nach Multiplikation mit $e^{-j\Omega M/2}$, die FT $R(e^{j\Omega})$:

$$R(e^{j\Omega}) = \frac{\sin[\Omega (\frac{M+1}{2})]}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \cdot e^{-j\Omega M/2}$$

Bemerkung: Da M/2 ganzzahlig sein soll, muss M eine gerade Zahl sein. Für die eigentliche Berechnung ist dies jedoch unerheblich.

iii) Die Folge $r[n]$ lässt sich als die Summe zweier Schrittfunktionen schreiben:

$$r[n] = u[n] - u[n - (M+1)]$$

Wegen der Linearitätseigenschaft der FT folgt, dass:

$$\mathrm{F}\{r[n]\} = \mathrm{F}\{u[n] - u[n-(M+1)]\} = \mathrm{F}\{u[n]\} - \mathrm{F}\{u[n-(M+1)]\}$$

Aus der Tabelle 2.3 (Transformationspaare), Seite 100 in [Os04] kann man die Fourier-Transformierte der Folge u[n] ablesen. Die verschobene Folge u[n-(M+1)] besitzt, wie im vorigen Aufgabenteil erwähnt, diesselbe Fourier-Transformierte, jedoch multipliziert mit dem Faktor $e^{-j\Omega M+1}$. Daraus folgt:

$$R(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta (\Omega - 2\pi k) - e^{-j\Omega (M+1)} [\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta (\Omega - 2\pi k)] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} - e^{-j\Omega(M+1)}[\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}] + (1-e^{-j\Omega(M+1)}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

Der letztere Term der entstanden ist lässt sich wegfallen, da die Summe von minus unendlich bis unendlich läuft, und die Delta-Impulsen, die im Abstand von 2π zueinander platziert sind, summiert. Die Multiplikation mit dem Term $e^{-j\Omega M+1}$ ändert das Gewicht dieser Impulse nicht, da $|e^{-j\Omega M+1}|=1$, und die Phase, die dieser Term hinzufügt ist (M+1)2π, also ein ganzahliges Vielfaches von 2π, und deshalb ändert sich auch der Abstand der Impulse zueinander nicht. Deshalb geht es um genau die gleiche Summe, ob multipliziert mit dem Faktor $e^{-j\Omega M+1}$ oder nicht. Es folgt also

$$(1-e^{-j\Omega(M+1)}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega - 2\pi k) = 0$$

und für $R(e^{j\Omega})$

$$R(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j\Omega(M+1)}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1-e^{-j\Omega(M+1)}}{1-e^{-j\Omega}}$$

Der letztere Bruch entspricht der geometrischen Reihe, die in i) entstanden ist. Wir gelangen somit immer wieder zu demselben Ergebnis.

b)

i) Die Folge w[n] kann in der Form

$$w[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi n}{M}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{j\frac{2\pi n}{M}} + e^{-j\frac{2\pi n}{M}}) = \frac{1}{2}\cdot r[n] - \frac{1}{4}\cdot(r[n]\cdot e^{j\frac{2\pi n}{M}} + r[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi n}{M}})$$

geschrieben werden, weil sie für die gleiche Werte von n definiert ist, wie auch r[n]. Ausgehend von dieser Gleichung, der Linearität der FT und der Eigenschaft (Theorem 3, Tabelle 2.2, [Os04])

$$x[n]\cdot e^{j\Omega_0 n} = X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

folgt:

$$W(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2}R(e^{j\Omega}) - \frac{1}{4}R(e^{j(\Omega-\frac{2\pi}{M})}) - \frac{1}{4}R(e^{j(\Omega+\frac{2\pi}{M})})$$

ii) Siehe Matlab-File 'Uebung_4_Aufgabe_2.m'

3. Fourier-Transformation (2)

Gegeben sei das LTI System mit dem Frequenzgang

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-e^{-j\Omega\cdot 2}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega\cdot 4}}, \qquad -\pi < \Omega \leqslant \pi.$$

Bestimmen Sie die Ausgangsfolge $y[n]$ für alle n, wenn die Eingangsfolge $x[n]$ für alle n folgende Form hat:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

(*Aufgabe 2.11, S. 112 in* [Os04], *geringfügig modifiziert*)

Lösung:

Es können zwei Ansätze gewählt werden.

a) Die Übertragungsfunktion $H(e^{j\Omega})$ kann mittels IFT die Impulsantwort h[n] produzieren, wobei die letztere, wenn mit der Eingangsfolge x[n] gefaltet, die Ausgangsfolge y[n] ergibt, also

$$x[n] * h[n] = y[n]$$

b) Man kann die Folge x[n] Fourier-transformieren, also $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\Omega})$, dann die FT mit der Übertragungsfunktion multiplizieren, um die FT der Ausgangsfolge zu erhalten (also $X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega}) = Y(e^{j\Omega})$) und davon mithilfe der inversen FT die Ausgangsfolge y[n] bestimmen.

Da es in dieser Aufgabe um die Fourier-Transformation und die Darstellung im Frequenzbereich geht, wird hier nur der zweite Ansatz betrachtet.

Es ist

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\Omega - \frac{\pi}{4} + 2\pi k) + e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\Omega + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)],$$

wie man wieder aus der Tabelle 2.3 ablesen kann. Beim Multiplizieren dieser Summe mit der Übertragungsfunktion $H(e^{j\Omega})$, die nur im Intervall $-\pi < \Omega \leq \pi$ betrachtet wird, muss man die Terme nur für k=0 berücksichtigen. Es folgt:

$$Y(e^{j\Omega}) = [e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})] \cdot \frac{1 - e^{-j2\Omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\Omega}} \Rightarrow$$

$$Y(e^{j\Omega}) = [\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2\Omega + \frac{\pi}{2})}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\Omega}}\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2\Omega - \frac{\pi}{2})}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\Omega}}\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})]$$

Aus der letzten Formel ist es schon ersichtlich, dass es sich um die transformierte einer sinusförmigen Folge handelt, mit Grundfrequenz $\Omega_0 = \pi / 4$. Darauf weisen die zwei Delta Impulse an den entsprechenden Stellen von $\pi / 4$ und $-\pi / 4$ hin. Es muss letztlich der Einfluss des multiplikativen Faktors vor den Impulsen geklärt werden. Durch Einsetzen von $\Omega = \pi / 4$ bzw. $\Omega = -\pi / 4$, erhält man:

$$[\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\cdot\frac{\pi}{4}}}\delta(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})] = [\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(\pi)}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}}\delta(0)] = \frac{-j - (-1)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 2 - 2j$$

$$[\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(2\cdot(-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2})}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\cdot(-\frac{\pi}{4})}}\delta(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})] = [\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(-\pi)}}{1 + \frac{1}{2}e^{j\pi}}\delta(0)] = \frac{j - (-1)}{1 + \frac{1}{2}(-1)} = 2 + 2j$$

Die zwei Brüche lassen sich also als komplexe Zahlen einfach schreiben, und ihr Einfluss ist eine Skalierung mit dem Faktor $|2 + 2j| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ und eine Drehung um $\arctan(\frac{2}{2}) = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\arctan(\frac{-2}{2}) = \frac{-\pi}{4}$. Man kann also für $Y(e^{j\Omega})$ schreiben:

$$Y(e^{j\Omega}) = [(2 - 2j)\cdot\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + (2 + 2j)\cdot\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})] = 2\cdot[(1 - j)\cdot\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + (1 + j)\cdot\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})]$$
$$= 2\cdot\sqrt{2}[e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot\delta(\Omega + \frac{\pi}{4})]$$

Durch Abgleichen mit Tabelle 2.3 in [Os04] erhält man das Endergebnis:

$$y[n] = 2\sqrt{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cdot\sin(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\cdot\sin(\frac{\pi(n+1)}{4}) = 2\sqrt{2}\cdot x[n+1]$$

LITERATUR:

[Os04] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, J. R. Buck: **Zeitdiskrete Signalverarbeitung**, 2., überarbeitete Aufl., Pearson, 2004