Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

12. Aufgabenblatt

1. Grundlagen der Diskreten Fouriertransformation (DFT)

Die Analysegleichung der DFT lautet:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

a) Wofür stehen die Symbole n, x[n], N, k und X[k]?

b) Was geschieht mit dem Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals, wenn es mit der Frequenz f_s abgetastet wird?

c) Wie heißt der Bandüberlappungsfehler, der bei der Abtastung entsteht und wie kann man ihn vermeiden?

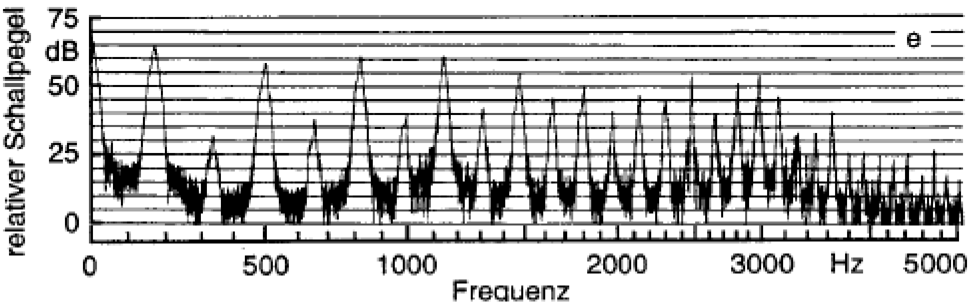
d) Wie wirkt sich das Herausschneiden von N Abtastwerten (Rechteckfensterung) auf das Spektrum aus?

e) Was versteht man unter dem Nyquistbereich und der Nyquistfrequenz? Warum wird die DFT meistens nur im Nyquistbereich ausgewertet?

f) An welchen Frequenzstellen treten bei der DFT die Spektrallinien auf und wie groß ist ihr Abstand?

2. Synthese eines Klarinettensignals

Gegeben sei das folgende Klangspektrum einer Klarinette:



Synthetisieren Sie mithilfe von Matlab ein Klarinettensignal, indem Sie das oben abgebildete Signal nachbilden und durch inverse Fourier-Transformation in den Zeitbereich transformieren. Der Grundton des Signals soll dabei wie oben abgebildet der Ton e (das ‚e' in der ‚kleinen Oktave') sein. Die Länge des Klarinettentons soll 3 Sekunden betragen, die Abtastrate sei 48 kHz.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Speichern Sie zunächst alle Werte, die Sie der Aufgabenstellung entnehmen können in Variablen mit aussagekräftigen Bezeichnungen. Berechnen Sie insbesondere den genauen Wert der Grundfrequenz, wenn Sie temperierte Stimmung und einen Kammerton von a' = 440 Hz annehmen.

2. Lesen Sie die relativen Pegel der ersten 14 Teiltöne aus dem oben abgebildeten Diagramm ab und speichern Sie diese in einem Vektor. Rechnen Sie die Werte in Matlab in die entsprechenden Amplituden um.

3. Überlegen Sie sich, wie viele Frequenzstützpunkte das Fourierspektrum enthalten muss, damit sich nach der Rücktransformation ein Signal der geforderten Länge ergibt. Speichern Sie auch diesen Wert in einer Variablen.

4. Berechnen Sie, an welchem Index des (noch zu erstellenden) Frequenzvektors die Grundschwingung liegen muss. Überlegen Sie sich dazu, welchen Frequenzabstand benachbarte Stützstellen haben und welcher Frequenz der erste Index des Frequenzvektors entspricht. Tun Sie dabei so, als begänne die Indexzählung in Matlab mit 0 (der Fehler wird später korrigiert).

   Es ist notwendig auf ganzzahlige Indizes zu runden, da die oben berechnete Grundschwingung nicht exakt auf eine der Frequenzstützstellen fällt.

5. Erzeugen Sie das Betragsspektrum. Initialisieren Sie dazu zunächst einen Vektor mit Nullen, dessen Länge der Hälfte der Länge des Fourierspektrums entspricht. Setzen Sie die Werte der ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung auf die entsprechende Amplitude; die entsprechenden Indizes erreichen Sie, indem Sie die ganzzahligen Vielfachen des Index der Grundschwingung betrachten und jeweils um den Wert 1 erhöhen, um den oben genannten Indexfehler auszugleichen.

6. Berücksichtigen Sie die Symmetrie des Betragsfrequenzgangs (siehe 3. Übung Aufgabe 1) und erweitern Sie das Betragsspektrum auf die volle, oben berechnete Länge.

7. Erzeugen Sie das Phasenspektrum. Das Phasenspektrum soll dabei so gewählt werden, dass das resultierende Signal bei dem Wert 0 beginnt, sodass es zu Beginn nicht zu einem Amplitudensprung kommt. Überlegen Sie dazu bei welchem Phasenwert dies der Fall ist. Erzeugen Sie hierbei zunächst einen Vektor der Länge des Fourierspektrums, der nur Nullen enthält. Setzen Sie daraufhin alle Frequenzstützstellen der ersten Hälfte des Phasenspektrums auf diesen Wert. Setzen Sie in einem zweiten Schritt die Werte der zweiten Hälfte des Phasenspektrums auf die entsprechenden Werte und berücksichtigen Sie hierbei ebenfalls die Symmetrieeigenschaften (siehe 3. Übung Aufgabe 1).

Welche Bedingung muss bei den Frequenzstützstellen 0 und fs/2 gelten?

8. Setzten Sie schließlich Betrag und Phasenspektrum zu einem komplexen Spektrum zusammen.

9. Berechnen Sie durch inverse Fouriertransformation das Zeitsignal. Überprüfen Sie dabei, ob das resultierende Signal tatsächlich reell ist. Sollte dies nicht der Fall sein, haben Sie die Symmetrien der Fouriertransformation nicht exakt berücksichtigt. Die Funktionen `real()` oder `abs()` zu verwenden, um das Signal reell zu machen, ist nicht zulässig!

10. Geben Sie das Signal über Ihre Soundkarte aus.

11. Plotten Sie das Betragsspektrum bis zu einer Frequenz von 2,5 kHz, sowie das Zeitsignal im Bereich von 0 bis 200 ms.

Hilfreiche Funktionen:
`round(), zeros(), fliplr(), exp(), ifft(), log10(), axis()`

Aus: D. Ch. V. Grünigen, Digitale Signalverarbeitung, Fachbuchverlag Leipzig / Carl Hanser Verlag, München / Wien 2001