Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 7. Aufgabenblatt

1. z-Transformation

1.1 Erklären Sie den Zusammenhang der z-Transformation mit der Fouriertransformation.

Die z-Transformation stellt eine Erweiterung der zeitdiskreten Fouriertransformation dar.

Die Analysegleichung der z-Transformation ist wie folgt definiert:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \text{ , mit } z = r \cdot e^{j\Omega}$$

Formt man diese Gleichung weiter um erhält man:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \underbrace{\left(r \cdot e^{j\Omega}\right)}_{z}^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Omega n}$$

Die z-Transformation vergleicht das Zeitsignal mit Exponentialschwingungen, deren Betrag nicht konstant sein muss, sondern mit der Zeit zu- bzw. abnehmen kann. Wählt man dabei ein r < 1, dann wird der Betrag mit größer werdendem n kleiner, wählt man ein r > 1, dann nimmt der Betrag mit n zu. Wählt man r = 1, so ergibt sich genau wieder die Fouriertransformation:

$$X(z)\Big|_{r=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Omega n}\Bigg|_{r=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

Diese Klasse von Exponentialschwingungen hängt also nun nicht mehr nur von Ω ab, sondern zusätzlich noch von r. Jede dieser Exponentialschwingung lässt sich somit als ein Punkt in der komplexen Ebene darstellen, denn mithilfe von r (Betrag) und Ω (Winkel) ist der Punkt eindeutig bestimmt.
Wie oben besprochen, erhält man die Lösung der Fouriertransformierten für den Fall r = 1. In dieser Vorstellung entspricht dies genau dem Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung (dem sog. Einheitskreis). Die Fouriertransformierte ist vollständig in der z-Transformierten enthalten, man betrachtet dazu nur den Verlauf der z-Transformierten auf dem Einheitskreis.

Wozu braucht man eigentlich die z-Tranformation? Man würde doch nie auf die Idee kommen, ein Zeitsignal auf Ähnlichkeiten mit zu- oder abnehmenden Exponentialschwingungen zu untersuchen?
Die Antwort auf diese Frage, sollte die restliche Aufgabe geben.

1.2 Beweisen Sie den Verschiebungssatz der z-Transformation:

Verschiebungssatz:
Aus $x_2[n] = x_1[n-k]$ folgt: $X_2(z) = z^{-k} \cdot X_1(z)$

Lösung:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n-k] \cdot z^{-n}, \text{Substitution mit m} = \text{n - k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot z^{-(m+k)}$$

$$= z^{-k} \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot z^{-m}}_{X_1(z)}$$

$$= z^{-k} \cdot X_1(z)$$

1.3 Gegeben sei die allgemeine Differenzengleichung eines digitalen IIR-Filters:

$y[n] = a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2] + \ldots + b_1 \cdot y[n-1] + b_2 \cdot y[n-2] + \ldots$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Filters durch z-Transformation der Differenzengleichung. Nutzen Sie dazu die Linearitätseigenschaft der z-Transformation aus und wenden Sie den Verschiebungssatz an.

Wie kann man sich eine Übertragungsfunktion H(z) anschaulich vorstellen?

Lösung:

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z\{y[n]\} = Z\{a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2] + \ldots + b_1 \cdot y[n-1] + b_2 \cdot y[n-2] + \ldots\} \\ &= a_0 \cdot Z\{x[n]\} + a_1 \cdot Z\{x[n-1]\} + a_2 \cdot Z\{x[n-2]\} + \ldots + b_1 \cdot Z\{y[n-1]\} + b_2 \cdot Z\{y[n-2]\} + \ldots \\ &= a_0 \cdot X(z) + a_1 \cdot z^{-1} \cdot X(z) + a_2 \cdot z^{-2} \cdot X(z) + \ldots + b_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + b_2 \cdot \cdot z^{-2} \cdot Y(z) + \ldots \\ &= X(z)\left(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots\right) + Y(z)\left(b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \ldots}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2} - \ldots}$$

Wie oben beschrieben stellt jedes z einen Punkt in der komplexen Ebene dar. Für jeden Punkt z liefert die Übertragungsfunktion einen bestimmten Wert. Anschaulich lässt sich der Funktionsverlauf der Übertragungsfunktion im 3-dimensionalen Raum als ein Gebirge über der komplexen Ebene darstellen.

1.4 Formen Sie die Übertragungsfunktion für ein Filter 2. Ordnung in eine Pol-Nullstellen-Darstellung um.

Lösung:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1\cdot z^{-1}+a_2\cdot z^{-2}}{1-b_1\cdot z^{-1}-b_2\cdot z^{-2}}=\frac{z^{-2}\left(a_0\cdot z^2+a_1\cdot z+a_2\right)}{z^{-2}\left(z^2-b_1\cdot z-b_2\right)}=\frac{a_0\cdot z^2+a_1\cdot z+a_2}{z^2-b_1\cdot z-b_2}$$

Nullstellen:

$$a_0\cdot z_0^2+a_1\cdot z_0+a_2=0$$

$$z_0^2+\frac{a_1}{a_0}\cdot z_0+\frac{a_2}{a_0}=0$$

$$\begin{aligned}z_{0_{1/2}}&=-\frac{a_1}{2a_0}\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2}-\frac{a_2}{a_0}}\\&=-\frac{a_1}{2a_0}\pm\frac{1}{2a_0}\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\\&=\frac{1}{2a_0}\left(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right)\end{aligned}$$

Polstellen:

$$z_\infty^2-b_1\cdot z_\infty-b_2=0$$

$$z_{\infty_{1/2}}=\frac{b_1}{2}\pm\sqrt{\frac{b_1^2}{4}+b_2}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$H(z)=\frac{a_0+a_1\cdot z^{-1}+a_2\cdot z^{-2}}{1-b_1\cdot z^{-1}-b_2\cdot z^{-2}}$$

$$=\frac{(z-z_{01})(z-z_{02})}{(z-z_{\infty1})(z-z_{\infty1})}$$

$$=\frac{\left(z+\frac{1}{2a_0}\left(a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right)\right)\left(z+\frac{1}{2a_0}\left(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}\right)\right)}{\left(z-\frac{b_1}{2}-\sqrt{\frac{b_1^2}{4}+b_2}\right)\left(z-\frac{b_1}{2}+\sqrt{\frac{b_1^2}{4}+b_2}\right)}$$

2. z-Transformation und Übertragungsfunktion

2.1 Bestimmen Sie Differenzengleichung und Blockschaltbild eines Systems mit der Übertragungsfunktion H(z) = 1 – z^{-2}.

Differenzengleichung:

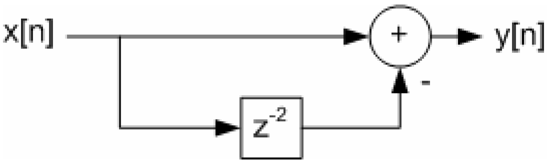
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2}$$

$$Y(z) = X(z)\left(1 - z^{-2}\right)$$

$$Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-2}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

Blockschaltbild:



2.2 Berechnen Sie den Amplitudengang und Phasengang des Systems.

Lösung:

Berechnung des Amplitudengangs der Fouriertransformierten:

$$|H(j\Omega)| = \left|H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}\right| = \left|1 - \left(e^{j\Omega}\right)^{-2}\right| = \left|1 - e^{-j2\Omega}\right| = \left|1 - \left(\cos(2\Omega) - j\sin(2\Omega)\right)\right|$$

$$= \left|\underbrace{1 - \cos(2\Omega)}_{\text{Realteil}} + j\underbrace{\sin(2\Omega)}_{\text{Imaginärteil}}\right| = \sqrt{\left(1 - \cos(2\Omega)\right)^2 + \sin^2(2\Omega)}$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(2\Omega) + \underbrace{\cos^2(2\Omega) + \sin^2(2\Omega)}_{=1}} = \sqrt{2 - 2\cos(2\Omega)} = \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos(2\Omega)}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1 - \cos(2\Omega)}{2}} = 2|\sin(\Omega)|$$

Berechnung des Phasengangs der Fouriertransformierten:

$$\angle(H(j\Omega)) = \angle\left(H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}\right) = \angle\left(1 - \left(e^{-j\Omega 2}\right)\right) = \angle\left(1 - \cos(2\Omega) + j\sin(2\Omega)\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sin(2\Omega)}{1 - \cos(2\Omega)}\right) = \frac{\pi}{2} - arc\cot\left(\frac{\sin(2\Omega)}{1 - \cos(2\Omega)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - arc\cot\left(\cot\left(\frac{2\Omega}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \Omega$$

2.3 Plotten Sie in Matlab den errechneten Betrags- und Phasengang. Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mithilfe der Matlab-Funktion `freqz()`. Um welche Art von Filter handelt es sich?

→ siehe Matlab-File „Uebung7_Aufgabe2_3“

Es handelt sich um ein Bandpass-Filter.