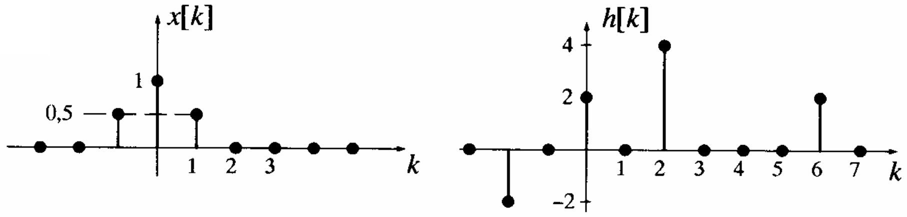
Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 4. Aufgabenblatt

1. Faltung und Impulsantwort

1.1 Gegeben sei ein Eingangssignal x[k] und Impulsantwort h[k] eines diskreten Systems:



Skizzieren Sie das Faltungsprodukt y[k] = x[k] ∗ h[k]. Verwenden Sie hierzu die Papierstreifenmethode.

Um eine Verwirrung mit den Indizes bei der Faltung zu vermeiden, verwenden wir statt des Zeitindexes k (siehe Grafik) den Zeitindex n. k bezeichnet den Laufindex der Faltungssumme.

Durch grafische Veranschaulichung der Faltungsgleichung in der Form

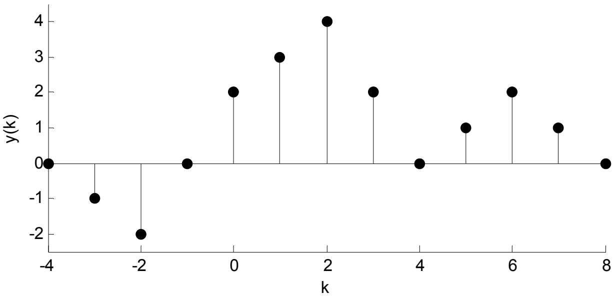
$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

ergibt sich:

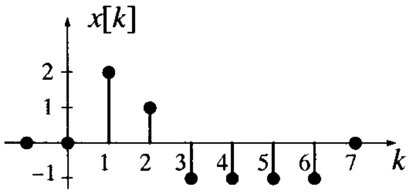
$$y(-4) = 0$$
$$y(-3) = 0{,}5 \cdot (-2) = -1$$
$$y(-2) = 1 \cdot (-2) = -2$$
$$y(-1) = 0{,}5 \cdot (-2) + 0{,}5 \cdot 2 = 0$$
$$y(0) = 1 \cdot 2 = 2$$
$$y(1) = 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 4 = 3$$
$$y(2) = 1 \cdot 4 = 4$$

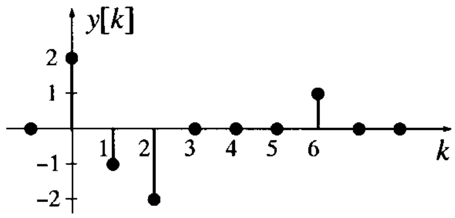
$$y(3) = 0{,}5 \cdot 4 = 2$$
$$y(4) = 0$$
$$y(5) = 0{,}5 \cdot 2 = 1$$
$$y(6) = 1 \cdot 2 = 2$$
$$y(7) = 0{,}5 \cdot 2 = 1$$
$$y(8) = 0$$

Grafische Darstellung:



1.2 Gegeben sind Eingangssignal x[k] und Ausgangssignal y[k] eines LTI-Systems. Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems durch Überlegungen zur diskreten Faltung.





Das Faltungsprodukt zweier Folgen der Länge N_1, N_2 hat die Länge: $N_3 = N_1+N_2-1$

In unserem Fall beträgt $N_1 = 6$ und $N_3 = 7$. Die Impulsantwort hat demnach eine Länge von: $N_2 = N_3-N_1+1 = 7-6+1 = 2$.

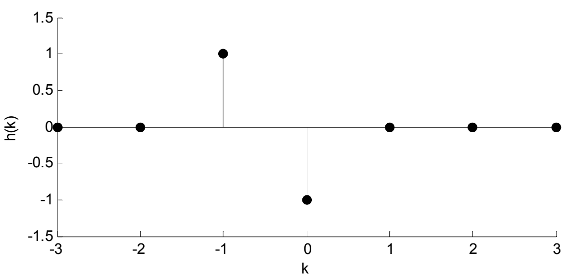
Das System ist nicht kausal, da es zum Zeitpunkt 0 bereits einen Ausgang liefert, obwohl das Signal erst zum Zeitpunkt 1 anliegt. Demnach liegt der erste Wert der Impulsantwort bei -1 und hat den Wert $h(-1) = 1$

Der zweite Wert an der Stelle k=0 ergibt sich durch: $y(1) = h(-1)\cdot x(2)+h(0)\cdot x(1)$.

Durch Umstellen nach h(0) und einsetzen der Werte ergibt er sich zu:

$h(0) = ½ \cdot (-1 - 1\cdot 1) = -1$

Die Impulsantwort sieht daher wie folgt aus:



2. Grundlagen der Diskreten Fouriertransformation (DFT)

Die Analysegleichung der DFT lautet:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

2.1 Wofür stehen die Symbole n, x[n], N, k und X[k]?

- **n** ist die diskrete Zeitvariable oder Zeitindex und gehört zu den ganzen Zahlen
- **x[n]** ist ein zeitdiskretes Signal (Folge, Sequenz). Will man die DFT von x[n] bestimmen, dann besteht x[n] aus N Abtastwerten: x[0], …, x[N-1]
- **N** Länge der Fouriertransformierten, bzw. Anzahl der Frequenzstützstellen. In der Regel entspricht die Länge der Fouriertransformierten der Anzahl der Anzahl der Samples, für die die Fouriertransformierte berechnet wurde (sofern kein Zero-Padding stattfindet)
- **k** ist die diskrete Frequenzvariable oder Frequenzindex und gehört ebenfalls zu den ganzen Zahlen.
- **X[k]** ist die DFT und besteht aus N Werten: X[0], …, X[N-1]. Denkt man nur an einen Wert, dann bezeichnet man X[k] als den k-ten DFT-Koeffizienzten.

2.2 Was geschieht mit dem Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals, wenn es mit der Frequenz f_s abgetastet wird?

Das Spektrum wird periodisch fortgesetzt mit der Periode f_s.

2.3 Wie heißt der Bandüberlappungsfehler, der bei der Abtastung entsteht und wie kann man ihn vermeiden?

Aliasing. Weitere Bezeichnungen: Aliasingfehler, Unterabtastung, Rückfaltungsverzerrungen.
Durch Einsatz eines Bandbegrenzungsfilters – auch Antialiasingfilter genannt – und/oder Erhöhen der Abtastfrequenz.

2.4 Wie wirkt sich das Herausschneiden von N Abtastwerten (Rechteckfensterung) auf das Spektrum aus?

Das Spektrum wird verschmiert.

2.5 Was versteht man unter dem Nyquistbereich und der Nyquistfrequenz? Warum wird die DFT meistens nur im Nyquistbereich ausgewertet?

Den Frequenzbereich von 0 … 0.5 f_s und die Frequenz 0.5 f_s.
Die DFT ist nur im Frequenzbereich von -0.5 fs … 0.5 fs eine Approximation für das Spektrum eines reellen, zeitkontinuierlichen Signals. Zusätzlich ist die DFT bezüglich der Frequenz 0 symmetrisch.