5. Übung EDS (WiSe08/09, 0135 L 372)
Diskrete Fouriertransformation

TU Berlin, FG Audiokommunikation, Frank Schultz

Fr, 09.01.2009, 10:15 Uhr

Symmetrie der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Aufgabe: Zeigen Sie, dass das (komplexe) Spektrum X[n] der diskreten Fouriertransformation einer (reellen) Zeitfolge x[k] bezüglich dem (Stütz)punkt bei n=N/2 symmetrisch ist.
DFT:

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, \mathrm{e}^{-2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{k\,n}{N}} \tag{1}$$

IDFT:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]\, \mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{k\,n}{N}} \tag{2}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 1

FT:

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{3}$$

ω ersetzen durch $-\omega$:

$$X(-\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{4}$$

konjugiert komplex auf beiden Seiten:

$$X(-\omega)^* = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{5}$$

man sieht:

$$X(\omega) = X(-\omega)^* \tag{6}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 2

FT:

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t}\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$X(\omega) = X(-\omega)^* \tag{8}$$

dann ist:

$$Re\,\{X(-\omega)\} = Re\,\{X(\omega)\} \tag{9}$$

$$Im\,\{X(-\omega)\} = -Im\,\{X(\omega)\} \tag{10}$$

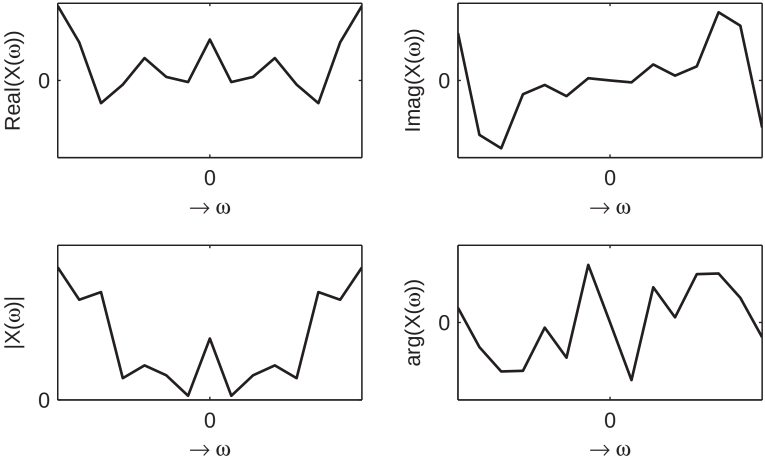
bzw.:

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \tag{11}$$

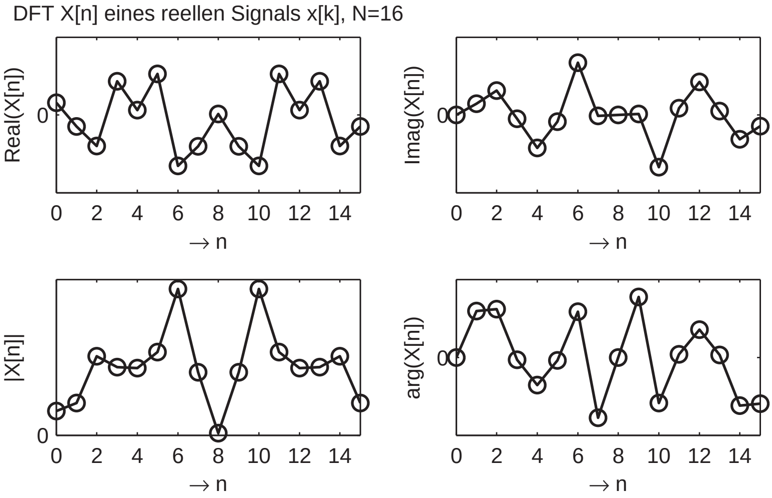
$$arg\,\{X(-\omega)\} = -arg\,\{X(\omega)\} \tag{12}$$

Symmetrie der Fouriertransformation 3

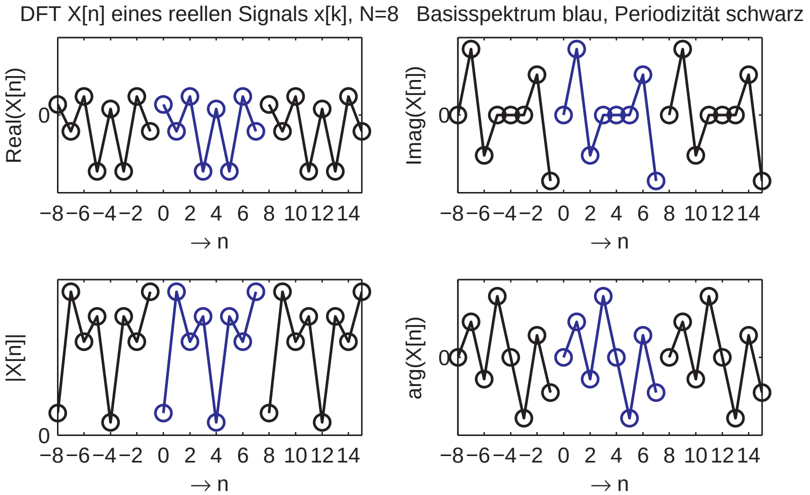
Fouriertransformierte X(ω) eines reellen Signals x(t)



Symmetrie der DFT



Symmetrie und Periodizität der DFT



Symmetrie der DFT, Behautpung

es soll also rechnerisch gezeigt werden, dass

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \equiv +Re\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{13}$$

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \equiv -Im\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{14}$$

bzw. in Kurzform:

$$X[\frac{N}{2}+l] \equiv X[\frac{N}{2}-l]^* \tag{15}$$

Symmetrie der DFT, Einsetzen in DFT

DFT:

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \, \mathrm{e}^{-2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{k\,n}{N}} \tag{16}$$

$$X[\frac{N}{2} + l] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \, \mathrm{e}^{-2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{k \cdot \left(\frac{N}{2} + l\right)}{N}} \tag{17}$$

$$X[\frac{N}{2} + l] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{k \cdot 2\,\pi\,\left(\frac{N}{2} + l\right)}{N}} \tag{18}$$

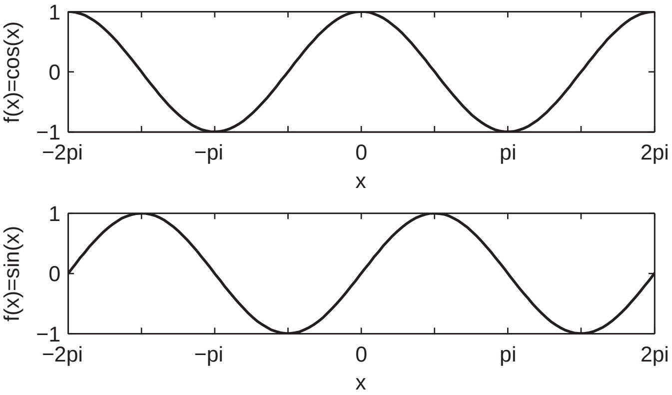
$$X[\frac{N}{2} + l] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k\,\pi + \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)} \tag{19}$$

Symmetrie der DFT, Euleridentität anwenden

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k\,\pi + \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)} \tag{20}$$

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(k\,\pi+\frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right) - \mathrm{j}\,\sin\left(k\,\pi+\frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{21}$$

Eigenschaften Sinus / Cosinus, Additionstheoreme



$$\cos(k\,\pi + \alpha) = \cos(k\,\pi - \alpha) \qquad k \in Z \tag{22}$$

$$-\sin(k\,\pi + \alpha) = +\sin(k\,\pi - \alpha) \qquad k \in Z \tag{23}$$

Symmetrie der DFT, Zusammenfassung bisheriges

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k\,\pi+\frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)} \tag{24}$$

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(k\,\pi+\frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)-\mathrm{j}\,\sin\left(k\,\pi+\frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{25}$$

$$\cos(k\,\pi+\alpha) = \cos(k\,\pi-\alpha) \qquad k\in Z \tag{26}$$

$$-\sin(k\,\pi+\alpha) = +\sin(k\,\pi-\alpha) \qquad k\in Z \tag{27}$$

Symmetrie der DFT, Rechnung für Realteil bzw. Cosinus

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(k\,\pi + \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{28}$$

$$\cos(k\,\pi+\alpha) = \cos(k\,\pi-\alpha) \qquad k \in Z \tag{29}$$

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(k\,\pi - \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{30}$$

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \tag{31}$$

Symmetrie der DFT, Beweis Realteil

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{k\cdot 2\,\pi\,\left(\frac{N}{2}+l\right)}{N}} \tag{32}$$

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}+l\right)\right)\right) \tag{33}$$

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot\left(\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \tag{34}$$

$$Re\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \equiv +Re\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{35}$$

Symmetrie der DFT, Rechnung für Imaginärteil bzw. Sinus

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot -\left(\sin\left(k\,\pi + \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{36}$$

$$-\sin(k\,\pi+\alpha) = +\sin(k\,\pi-\alpha) \qquad k\in Z \tag{37}$$

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot +\left(\sin\left(k\,\pi - \frac{2\,\pi\,k\,l}{N}\right)\right) \tag{38}$$

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot +\left(\sin\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \tag{39}$$

Symmetrie der DFT, Beweis Imaginärteil

$$X[\frac{N}{2}+l] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{k\cdot 2\,\pi\,\left(\frac{N}{2}+l\right)}{N}} \tag{40}$$

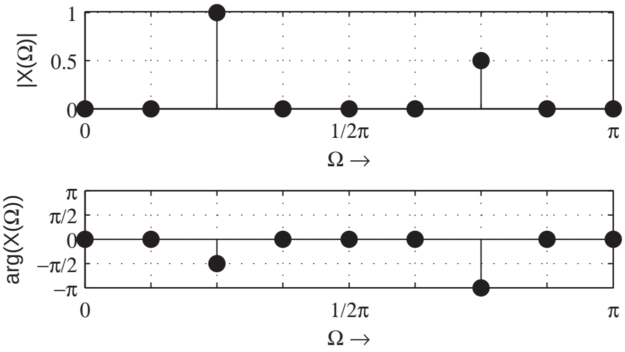
$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot -\left(\sin\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}+l\right)\right)\right) \tag{41}$$

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cdot +\left(\sin\left(\frac{2\,\pi\,k}{N}\cdot\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right) \tag{42}$$

$$Im\left\{X[\frac{N}{2}+l]\right\} \equiv -Im\left\{X[\frac{N}{2}-l]\right\} \tag{43}$$

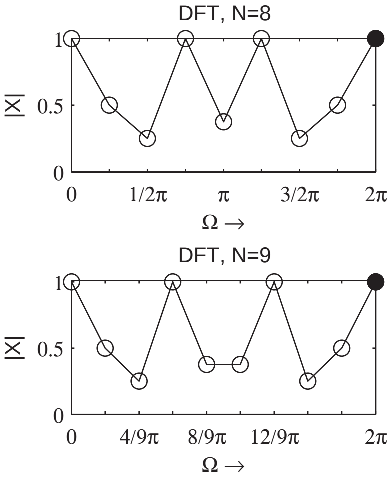
Eigenschaften DFT, Inverse DFT

Aufgabe: Gegeben sei folgender diskreter Betrags- und Phasenfrequenzgang (DFT) eines Abtastsignals:

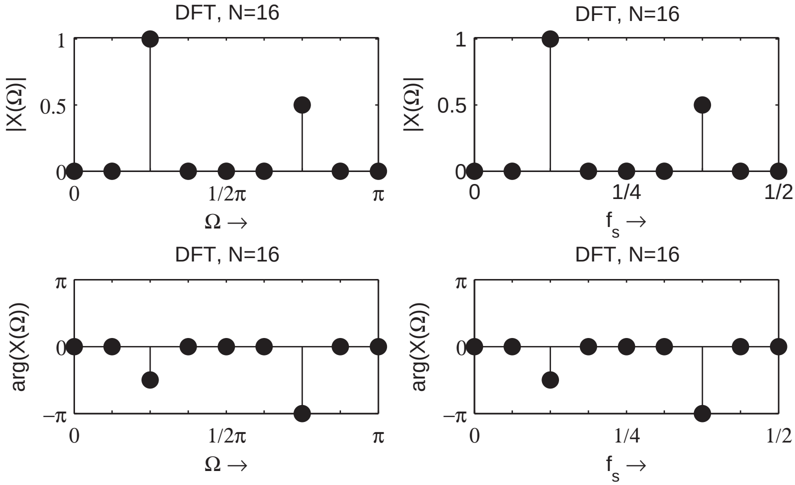


2.1 Erweitern Sie das Betrags- und Phasenspektrum derart, dass sich bei der Rücktransformation in den Zeitbereich ein reelles Signal ergibt.

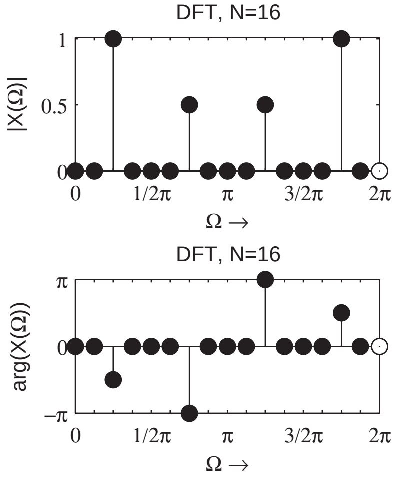
Eigenschaften DFT, gerade/ungerade Ordnung



Gegebenes Spektrum



Ergänztes Spektrum



IDFT

2.2 Rekonstruieren Sie das Zeitsignal durch inverse Fouriertransformation. Nach wievielen Samples wiederholt sich das Signal periodisch?
IDFT:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{k\,n}{N}} \tag{44}$$

X[n] sind nur an den Stützstellen n=2,6,10,14 von Null verschieden

$$X[2] = 1 \cdot e^{\mathrm{j}-\pi/2} \qquad X[14] = 1 \cdot e^{\mathrm{j}+\pi/2} \tag{45}$$

$$X[6] = 1/2 \cdot e^{\mathrm{j}-\pi} \qquad X[10] = 1/2 \cdot e^{\mathrm{j}+\pi} \tag{46}$$

mit N=16

$$x[k] = X[2]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{2\,k}{16}} + X[6]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{6\,k}{16}} + X[10]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{10\,k}{16}} + X[14]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{14\,k}{16}} \tag{47}$$

IDFT

$$x[k] = X[2]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{2\,k}{N}} + X[6]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{6\,k}{N}} + X[10]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{10\,k}{N}} + X[14]\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{14\,k}{N}} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} x[k] &= 1 \cdot e^{\mathrm{j} - \pi/2}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{2\,k}{16}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} - \pi}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{6\,k}{16}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j} + \pi}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{10\,k}{16}} + \\ &= 1 \cdot e^{\mathrm{j} + \pi/2}\,\mathrm{e}^{+2\,\pi\,\mathrm{j}\,\frac{14\,k}{16}} \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} x[k] &= 1 \cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{5\,\pi\,k}{4}} + \\ &= 1 \cdot e^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{7\,\pi\,k}{4}} \end{aligned} \tag{50}$$

IDFT

mit

$$e^{j\,k\,n} = e^{j\,k\,n} \cdot \underbrace{e^{-j\,2\,\pi\,k}}_{\equiv 1} = e^{j(n-2\,\pi)\,k} \tag{51}$$

wird

$$\begin{aligned} x[k] &= 1 \cdot e^{-j\,\pi/2}\, e^{j\,\frac{\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-j\,\pi}\, e^{j\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{j\,\pi}\, e^{j\,\frac{5\,\pi\,k}{4}} + \\ &= 1 \cdot e^{j\,\pi/2}\, e^{j\,\frac{7\,\pi\,k}{4}} \end{aligned} \tag{52}$$

zu

$$\begin{aligned} x[k] &= 1 \cdot e^{-j\,\pi/2}\, e^{j\,\frac{\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{-j\,\pi}\, e^{j\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\ &= 1/2 \cdot e^{j\,\pi}\, e^{j\left(\frac{5\,\pi}{4} - 2\,\pi\right)k} + \\ &= 1 \cdot e^{j\,\pi/2}\, e^{j\left(\frac{7\,\pi}{4} - 2\,\pi\right)k} \end{aligned} \tag{53}$$

IDFT

weiterhin wird

$$
\begin{aligned}
x[k] &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi\,k}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\left(\frac{5\,\pi}{4}-2\,\pi\right)k} + \\
&= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\left(\frac{7\,\pi}{4}-2\,\pi\right)k}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

dann vereinfacht zu

$$
\begin{aligned}
x[k] &= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{\pi\,k}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{3\,\pi\,k}{4}} + \\
&= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi\,k}{4}}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

IDFT

und damit

$$
\begin{aligned}
x[k] &= 1 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\left(\frac{\pi\, k}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\left(\frac{3\,\pi\, k}{4} - \pi\right)} + \\
&= 1/2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{3\,\pi\, k}{4} - \pi\right)} + \\
&= 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi\, k}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

mit

$$
2\cos(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,a} \tag{57}
$$

folgt dann

$$
x[k] = 2\cos\left(\frac{\pi\, k}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + 1\cos\left(\frac{3\,\pi\, k}{4} - \pi\right) \tag{58}
$$

Signalperiode

Die Periode der Kosinus-Funktion beträgt 2π. Um die Periode der beiden Terme herauszufinden ist es also von Interesse, wann das Argument des Kosinus den Wert eines Vielfachen von $2\,\pi$ annimmt. Die Frequenzen der Kosinus-Terme sind $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\,\pi}{4}$, die Phasenterme können vernachlässigt werden, da sie keinen Einfluss auf die Periode des Signals haben. Der erste Term erreicht demnach nach 8 Samples den Wert 2π, der zweite Term erreicht ebenfalls nach 8 Samples ein Vielfaches von 2π (nämlich $3 \cdot 2\pi = 6\pi$). Da das kleinste gemeinsame Vielfache von 8 und 8 ebenfalls 8 ist, beträgt die Periode des Gesamtsignals 8 Samples.

Normierung auf Frequenzen

2.3 Skizzieren Sie das Zeitsignal innerhalb einer Periode und skalieren Sie die Zeitachse unter Berücksichtigung der Annahme, dass die oben gezeigten Frequenzstützstellen (Frequenzbins) einen Abstand von 500 Hz haben.

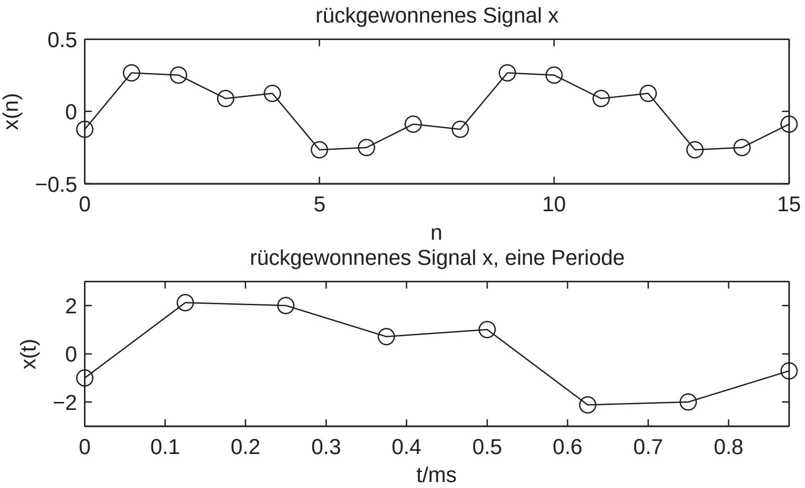
$$df = \frac{f_s}{N} \tag{59}$$

$$f_s = df\ N = \frac{1}{T_s} \tag{60}$$

$$f_s = 500\,Hz \cdot 16 = 8000\,Hz \tag{61}$$

$$T_s = 0.125\,ms \tag{62}$$

Rückgewonnenes Signal



FFT-Analyse eines wav-Files

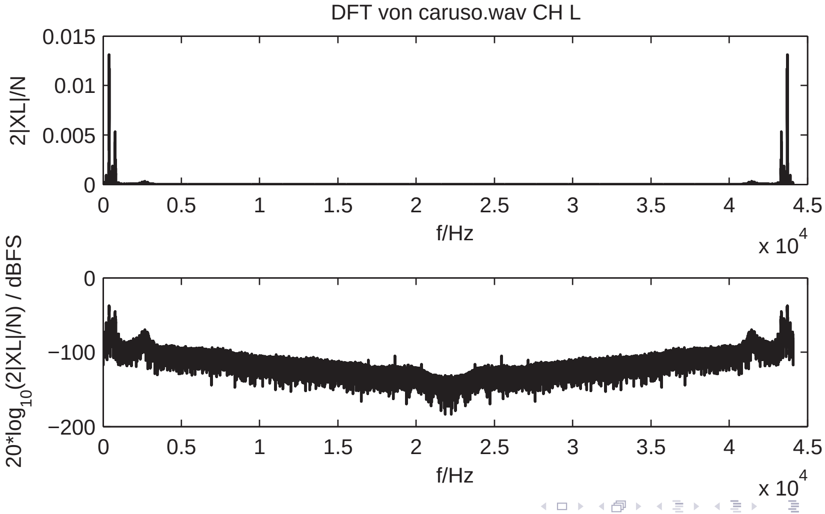
Aufgabe:

- **3.1** Lesen Sie das Audiofile „caruso.wav“ in Matlab ein und extrahieren Sie den linken Audiokanal als neuen Vektor xl.
- **3.2** Berechnen Sie daraus die diskrete Fouriertransformierte XL.
- **3.3** Zeichnen Sie das Betragsspektrum von XL und skalieren Sie die x-Achse auf eine Frequenz in Hz.
- **3.4** Betrachten Sie das Spektrum in einem Bereich zwischen 0 und 1000 Hz. Bei welcher Frequenz liegt der Grundton des Klangs ? Wie stark sind die ersten drei Obertöne in dB relativ zum Grundton ?

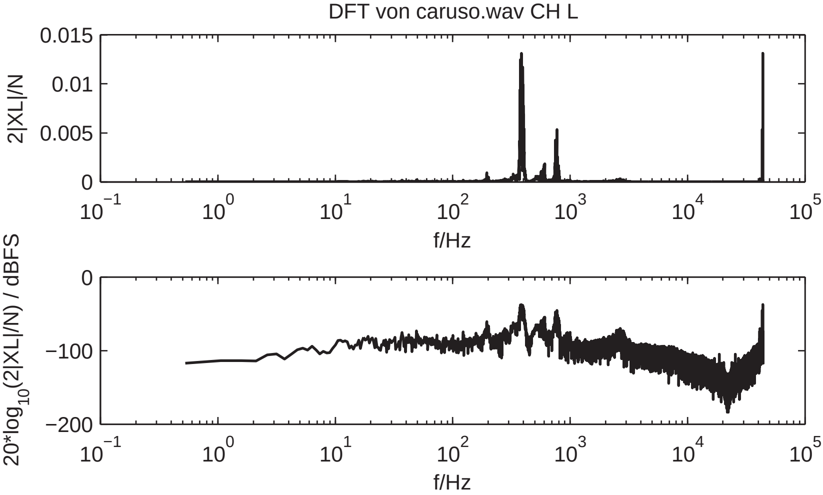
FFT-Analyse, Matlab

```
clear all; close all; clc;
%3.1
[x,fs,Nb]=wavread('caruso'); %einlesen
%fs=48000; x=sin(2*pi*100/fs*[0:480*10-1])+3; x=x'; %testsignal
xl=x(:,1);          %nur linker kanal
N=length(xl);       %länge von xl
%3.2
XL=fft(xl);         %fft anwenden
%3.3
df=fs/N;            %frequenzauflösung der fft
f=0:df:fs-df;       %frequenzvektor von DC bis 'kurz' vor abtastfrequenz
XLa=abs(XL)/N*2; %betrag der fft und normieren auf sinusamplituden
XLa(1)=XLa(1)/2; %DC richtig normieren (wg. kein 2. konj. kompl. Wert)
XLa(N/2+1)=XLa(N/2+1)/2; %fs/2 richtig normieren (dito), achtung: nur weil N geradzahlig
figure              %kompletter amplitudenfrequenzgang
subplot(2,1,1)      %log. f-Achse, lineare Amplitude (für lin. f-Achse plot(f,XLa))
semilogx(f,XLa),xlabel('f/Hz'),ylabel('2|XL|/N'),title('DFT␣von␣caruso.wav␣CH␣L')
subplot(2,1,2)      %log. f-Achse, Pegel
semilogx(f,20*log10(XLa)),xlabel('f/Hz'),ylabel('20*log_1_0(2|XL|/N)␣/␣dBFS')
%3.4
figure              %amplitudenfrequenzgang nur von 0Hz bis 1000Hz
subplot(2,1,1)      %log. f-Achse, lineare Amplitude
semilogx(f,XLa),xlabel('f/Hz'),ylabel('2|XL|/N'),axis([0 1000 0 max(XLa)]),
title('DFT␣von␣caruso.wav␣CH␣L')
subplot(2,1,2)    %log. f-Achse, Pegel
semilogx(f,20*log10(XLa)),xlabel('f/Hz'),ylabel('20*log_1_0(2|XL|/N)␣/␣dBFS'),
axis([0 1000 -100 0])
%Der Grundton liegt bei ca. 200 Hz und hat eine Amplitude von ca. -60 dBFS.
%Die ersten Obertöne liegen bei ca. 400, 600 und 800 Hz und haben in etwa
%die Amplituden -37 dBFS, -54 dBFS und -45 dBFS.
```

Amplitudenspektrum „caruso.wav“



Amplitudenspektrum „caruso.wav“



Grundton und Harmonische „caruso.wav“