Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

6. Aufgabenblatt

1. Eigenschaften von Systemen

1.1 $y_1[k] = 5 \cdot x[k+1]$

- nicht kausal
- linear

Beweis:

$$S\{a_1u_1[n] + a_2u_2[n]\} = 5 \cdot (a_1u_1[n+1] + a_2u_2[n+1])$$
$$= a_1 \cdot 5 \cdot u_1[n+1] + a_2 \cdot 5 \cdot u_2[n+1]$$
$$= a_1 \cdot S\{u_1[n+1]\} + a_2 \cdot S\{u_2[n+1]\}$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.
Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

$$y_2[k] = S\{x_2[k]\}$$
$$= 5 \cdot x_2[k+1]$$
$$= 5 \cdot x_1[k+m+1]$$
$$= y_1[k+m]$$

1.2 $y_1[k] = 5 + x[k-1]$

- kausal
- nicht-linear

Beweis:

$$S\{a_1u_1[n] + a_2u_2[n]\} = 5 + a_1u_1[n+1] + a_2u_2[n+1]$$
$$\neq$$
$$a_1S\{u_1[n+1]\} + a_2S\{u_2[n+1]\} = 5a_1 + a_1u_1[n+1] + 5a_2 + a_2u_2[n+1]$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.
Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

$$y_2[k] = S\{x_2[k]\}$$
$$= 5 + x_2[k-1]$$
$$= 5 + x_1[k+m-1]$$
$$= y_1[k+m]$$

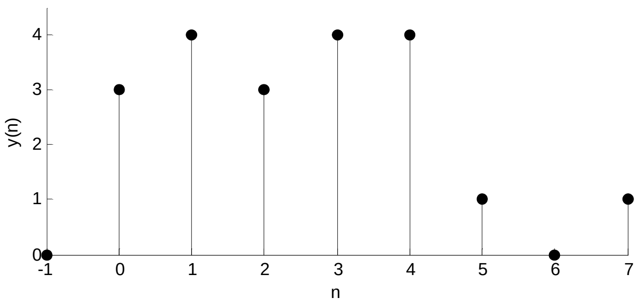
2. Faltung und Impulsantwort

2.1 $$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

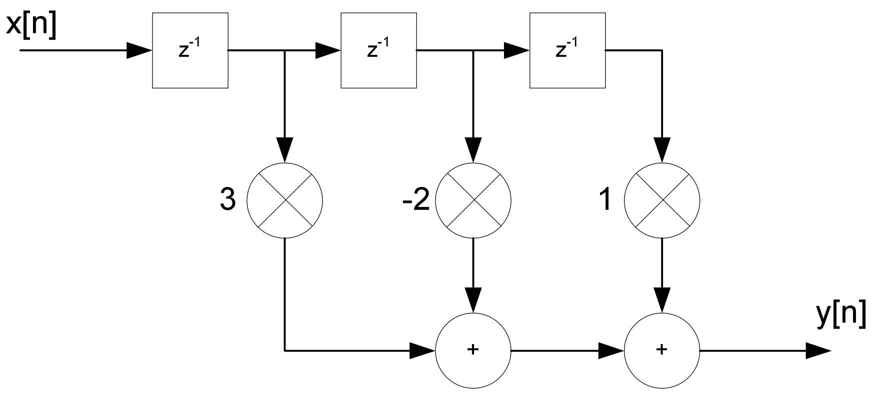
Übersichtlichste (aber schreibaufwändige) Methode: untereinanderschreiben der Werte

i =	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n	y[n]
h[i]	0	0	0	0	0	0	3	-2	1	0	0	0	0	0	0	-	-
x[-1-i]	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
x[0-i]	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
x[1-i]	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4
x[2-i]	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	2	3
x[3-i]	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	3	4
x[4-i]	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0	4	4
x[5-i]	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	5	1
x[6-i]	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	6	0
x[7-i]	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	7	1
x[8-i]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	8	0

Grafisch dargestellt:



2.2



3. DFT und FFT

3.1 Das Signal ist periodisch und besteht aus überlagerten Sinus-Schwingungen. Es ist als Grundton mit Obertönen aufzufassen. Das zugehörige Spektrum besteht demnach aus mehreren Spektrallinien bei ganzzahligen Vielfachen der Grundschwingung. Die Frequenz der Grundschwingung beträgt ungefähr

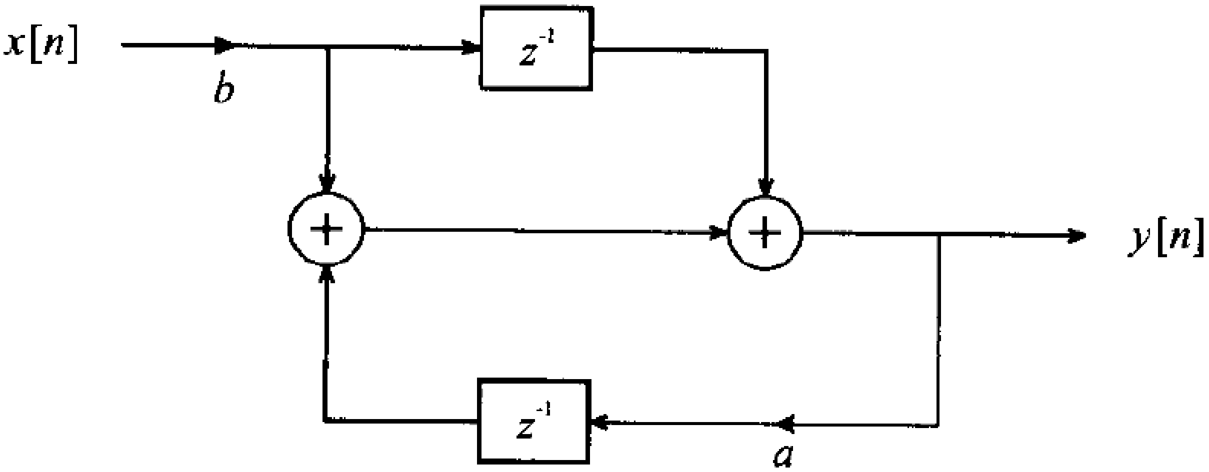
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{15\,\mathrm{ms}} = 66{,}67\ \mathrm{Hz}$$

3.2 Der Abstand beträgt $\Delta f = \frac{48\,\mathrm{kHz}}{512} = 93{,}75\,\mathrm{Hz}$

3.3 Eine größere FFT-Länge würde die spektrale Auflösung der FFT erhöhen.

3.4 In diesem Fall wählen wir das Hanningfenster als Fensterfunktion.
Das Spektrum der FFT repräsentiert das Spektrum des periodisch fortgesetzten Signalausschnitts. Da die Signalperiode (lt. Aufgabenstellung) nicht bekannt ist, kann die Länge des Rechteckfensters nicht ideal an das Signal angepasst werden. Es kommt bei der periodischen Fortsetzung zu Sprungstellen an den Rändern des Ausschnitts. Im Spektrum erscheinen zusätzliche Signalanteile, die im ursprünglichen Signal nicht vorhanden sind.
Auch das Hanningfenster sorgt für zusätzliche Signalanteile im Spektrum, der Vorteil des Hanningfensters gegenüber dem Rechteckfenster besteht jedoch darin, dass es einen guten Kompromiss aus geringer Hauptkeulenbreite und hoher Nebenkeulendämpfung darstellt und somit für unbekannte Signale am besten geeignet ist.

4. z-Transformation und Übertragungsfunktion



4.1 y[n] = b·x[n-1] + b·x[n] + a·y[n-1]

4.2 Transformation in den z-Bereich:

$$Y(z) = b \cdot X(z) z^{-1} + b \cdot X(z) + a \cdot Y(z) z^{-1}$$

$$Y(z)\left(1 - az^{-1}\right) = X(z)\left(bz^{-1} + b\right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b + bz^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

4.3

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \ \text{mit a} = \text{b} = 1$$

$$\left| H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \right| = \left| H(e^{j\Omega}) \right| = \left| \frac{1 + e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \right| = \frac{\left|1 + e^{-j\Omega}\right|}{\left|1 - e^{-j\Omega}\right|}$$

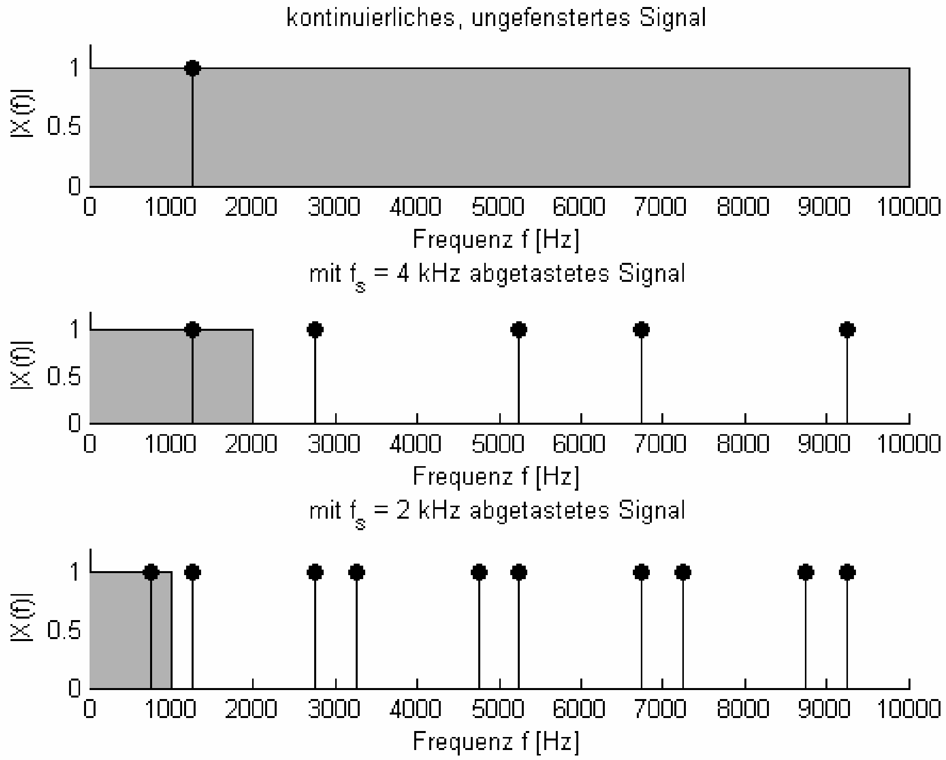
$$= \frac{\left|1 + \cos(\Omega) - j\sin(\Omega)\right|}{\left|1 - \cos(\Omega) + j\sin(\Omega)\right|} = \frac{\sqrt{\left(1 + \cos(\Omega)\right)^2 + \sin^2(\Omega)}}{\sqrt{\left(1 - \cos(\Omega)\right)^2 + \sin^2(\Omega)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 2\cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) + \sin^2(\Omega)}}{\sqrt{1 - 2\cos(\Omega) + \cos^2(\Omega) + \sin^2(\Omega)}} = \frac{\sqrt{2 + 2\cos(\Omega)}}{\sqrt{2 - 2\cos(\Omega)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot \left(1 + \cos(\Omega)\right)}}{\sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos(\Omega)\right)}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos(\Omega)}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(\Omega)}} = \frac{\sqrt{1 + \cos(\Omega)}}{\sqrt{1 - \cos(\Omega)}}$$

$$= \frac{\sin(\Omega)}{1 - \cos(\Omega)}$$

5. Abtastung


kontinuierliches, ungefenstertes Signal
|X(f)|
1
0.5
0
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000
Frequenz f [Hz]
mit f_s = 4 kHz abgetastetes Signal
|X(f)|
1
0.5
0
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000
Frequenz f [Hz]
mit f_s = 2 kHz abgetastetes Signal
|X(f)|
1
0.5
0
0 1000 2000 3000 4000 5000 6000 7000 8000 9000 10000
Frequenz f [Hz]