

Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

5. Aufgabenblatt

1. z-Transformation

1.1 Erklären Sie den Zusammenhang der z-Transformation mit der Fouriertransformation.

Die z-Transformation stellt eine Erweiterung der zeitdiskreten Fouriertransformation dar.

Die Analysegleichung der z-Transformation ist wie folgt definiert:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \text{ mit } z = r \cdot e^{j\Omega}$$

Formt man diese Gleichung weiter um erhält man:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \underbrace{(r \cdot e^{j\Omega})^{-n}}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Omega n}$$

Die z-Transformation lässt also einen Vergleich des Zeitsignals mit Exponentialschwingungen zu, deren Betrag nicht konstant sein muss, sondern mit der Zeit zu- bzw. abnehmen kann. Wählt man dabei ein $r < 1$, dann wird der Betrag mit größer werdendem n kleiner, wählt man ein $r > 1$, dann nimmt der Betrag mit n zu. Wählt man $r = 1$, so ergibt sich genau wieder die Fouriertransformation:

$$X(z) \Big|_{r=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\Omega n} \Big|_{r=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

Diese Klasse von Exponentialschwingungen hängt also nun nicht mehr nur von Ω ab, sondern zusätzlich noch von r . Jede dieser Exponentialschwingung lässt sich somit als ein Punkt in der komplexen Ebene darstellen, denn mithilfe von r (Betrag) und Ω (Winkel) ist der Punkt eindeutig bestimmt.

Wie oben besprochen, erhält man die Lösung der Fouriertransformierten für den Fall $r = 1$. In dieser Vorstellung entspricht dies genau dem Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung (dem sog. Einheitskreis). Die Fouriertransformierte ist vollständig in der z-Transformierten enthalten, man betrachtet dazu nur den Verlauf der z-Transformierten auf dem Einheitskreis.

Wozu braucht man eigentlich die z-Transformation? Man würde doch nie auf die Idee kommen, ein Zeitsignal auf Ähnlichkeiten mit zu- oder abnehmenden Exponentialschwingungen zu untersuchen?

Die Antwort auf diese Frage, sollte die restliche Aufgabe geben.

1.2 Beweisen Sie den Verschiebungssatz der z-Transformation:

Verschiebungssatz:

Aus $x_2[n] = x_1[n - k]$ folgt: $X_2(z) = z^{-k} \cdot X_1(z)$

Lösung:

$$\begin{aligned} X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n - k] \cdot z^{-n}, \text{ Substitution mit } m = n - k \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot z^{-(m+k)} \\ &= z^{-k} \cdot \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot z^{-m}}_{X_1(z)} \\ &= z^{-k} \cdot X_1(z) \end{aligned}$$

1.3 Gegeben sei die allgemeine Differenzgleichung eines digitalen IIR-Filters:

$$y[n] = a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2] + \dots + b_1 \cdot y[n-1] + b_2 \cdot y[n-2] + \dots$$

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Filters durch z-Transformation der Differenzgleichung. Nutzen Sie dazu die Linearitätseigenschaft der z-Transformation aus und wenden Sie den Verschiebungssatz an.

Wie kann man sich eine Übertragungsfunktion $H(z)$ anschaulich vorstellen?

Lösung:

$$\begin{aligned} Y(z) &= Z\{y[n]\} = Z\{a_0 \cdot x[n] + a_1 \cdot x[n-1] + a_2 \cdot x[n-2] + \dots + b_1 \cdot y[n-1] + b_2 \cdot y[n-2] + \dots\} \\ &= a_0 \cdot Z\{x[n]\} + a_1 \cdot Z\{x[n-1]\} + a_2 \cdot Z\{x[n-2]\} + \dots + b_1 \cdot Z\{y[n-1]\} + b_2 \cdot Z\{y[n-2]\} + \dots \\ &= a_0 \cdot X(z) + a_1 \cdot z^{-1} \cdot X(z) + a_2 \cdot z^{-2} \cdot X(z) + \dots + b_1 \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + b_2 \cdot z^{-2} \cdot Y(z) + \dots \\ &= X(z)(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots) + Y(z)(b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots) \end{aligned}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2} - \dots}$$

Wie oben beschrieben stellt jedes z einen Punkt in der komplexen Ebene dar. Für jeden Punkt z liefert die Übertragungsfunktion einen bestimmten Wert. Anschaulich lässt sich der Funktionsverlauf der Übertragungsfunktion im 3-dimensionalen Raum als ein Gebirge über der komplexen Ebene darstellen.

1.4 Formen Sie die Übertragungsfunktion für ein Filter 2. Ordnung in eine Pol-Nullstellen-Darstellung um.

Lösung:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} = \frac{z^{-2}(a_0 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_2)}{z^{-2}(z^2 - b_1 \cdot z - b_2)} = \frac{a_0 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_2}{z^2 - b_1 \cdot z - b_2}$$

Nullstellen:

$$a_0 \cdot z_0^2 + a_1 \cdot z_0 + a_2 = 0$$

$$z_0^2 + \frac{a_1}{a_0} \cdot z_0 + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

$$\begin{aligned} z_{0/2} &= -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}} \\ &= -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0} \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \\ &= \frac{1}{2a_0} \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \right) \end{aligned}$$

Polstellen:

$$z_\infty^2 - b_1 \cdot z_\infty - b_2 = 0$$

$$z_{\infty/2} = \frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2}$$

Für die Übertragungsfunktion ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} \\ &= \frac{(z - z_{01})(z - z_{02})}{(z - z_{\infty 1})(z - z_{\infty 2})} \\ &= \frac{\left(z + \frac{1}{2a_0} \left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \right) \right) \left(z + \frac{1}{2a_0} \left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \right) \right)}{\left(z - \frac{b_1}{2} - \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} \right) \left(z - \frac{b_1}{2} + \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + b_2} \right)} \end{aligned}$$

2. z-Transformation und Übertragungsfunktion

2.1 Bestimmen Sie Differenzengleichung und Blockschaltbild eines Systems mit der Übertragungsfunktion $H(z) = 1 - z^{-2}$.

Differenzengleichung:

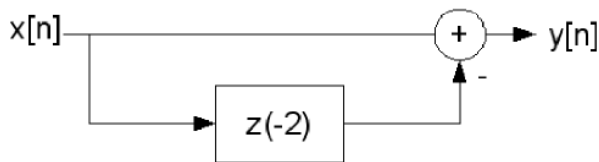
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2}$$

$$Y(z) = X(z)(1 - z^{-2})$$

$$Y(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-2}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-2]$$

Blockschaltbild:



2.2 Berechnen Sie den Amplitudengang und Phasengang des Systems.

Lösung:

Berechnung des Amplitudengangs der Fouriertransformierten:

$$\begin{aligned}
 |H(j\Omega)| &= |H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = |1 - (e^{j\Omega})^{-2}| = |1 - e^{-j2\Omega}| = |1 - (\cos(2\Omega) - j \sin(2\Omega))| \\
 &= \left| \underbrace{1 - \cos(2\Omega)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{j \sin(2\Omega)}_{\text{Imaginärteil}} \right| = \sqrt{(1 - \cos(2\Omega))^2 + \sin^2(2\Omega)} \\
 &= \sqrt{1 - 2 \cos(2\Omega) + \underbrace{\cos^2(2\Omega) + \sin^2(2\Omega)}_{=1}} = \sqrt{2 - 2 \cos(2\Omega)} = \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos(2\Omega)}{2}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{1 - \cos(2\Omega)}{2}} = 2 |\sin(\Omega)|
 \end{aligned}$$

Berechnung des Phasengangs der Fouriertransformierten:

$$\begin{aligned}
 \angle(H(j\Omega)) &= \angle(H(z)|_{z=e^{j\Omega}}) = \angle(1 - (e^{-j2\Omega})) = \angle(1 - \cos(2\Omega) + j \sin(2\Omega)) \\
 &= \arctan\left(\frac{\sin(2\Omega)}{1 - \cos(2\Omega)}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arc cot}\left(\frac{\sin(2\Omega)}{1 - \cos(2\Omega)}\right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \text{arc cot}\left(\cot\left(\frac{2\Omega}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \Omega
 \end{aligned}$$

2.3 Plotten Sie in Matlab den errechneten Betrags- und Phasengang. Kontrollieren Sie ihr Ergebnis mithilfe der Matlab-Funktion `freqz()`. Um welche Art von Filter handelt es sich?

→ siehe Matlab-File „Aufgabe2_3“

Es handelt sich um ein Bandpass-Filter.