Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

Musterlösung 3. Aufgabenblatt

1. Symmetrie der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Zu zeigen ist: $X\left[\frac{N}{2}+l\right] = X^*\left[\frac{N}{2}-l\right]$

Wir müssen also zeigen, dass

1. $\mathrm{Re}\left\{X\left[\frac{N}{2}+l\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{X\left[\frac{N}{2}-l\right]\right\}$, und
2. $\mathrm{Im}\left\{X\left[\frac{N}{2}+l\right]\right\} = -\mathrm{Im}\left\{X\left[\frac{N}{2}-l\right]\right\}$,

Die Analysegleichung der DFT lautet:

$$X[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Dadurch ergibt sich in unserem Fall:

$$X\left[\frac{N}{2}+l\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+l\right)}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\left(\cos\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+l\right)\right) - j\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}+l\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\left(\cos\left(k\pi + k\frac{2\pi}{N}l\right) - j\sin\left(k\pi + k\frac{2\pi}{N}l\right)\right)$$

Beweis für 1.:

$$\mathrm{Re}\left\{X\left[\frac{N}{2}+l\right]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cos\left(k\pi + k\frac{2\pi}{N}l\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cos\left(k\pi - k\frac{2\pi}{N}l\right), \quad \text{mit } \cos(k\pi+\alpha) = \cos(k\pi-\alpha)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\cos\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left\{X\left[\frac{N}{2}-l\right]\right\}$$

Beweis für 2.:

$$\operatorname{Im}\left\{X\left[\frac{N}{2}+l\right]\right\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\left(-\sin\left(k\pi + k\frac{2\pi}{N}l\right)\right)$$

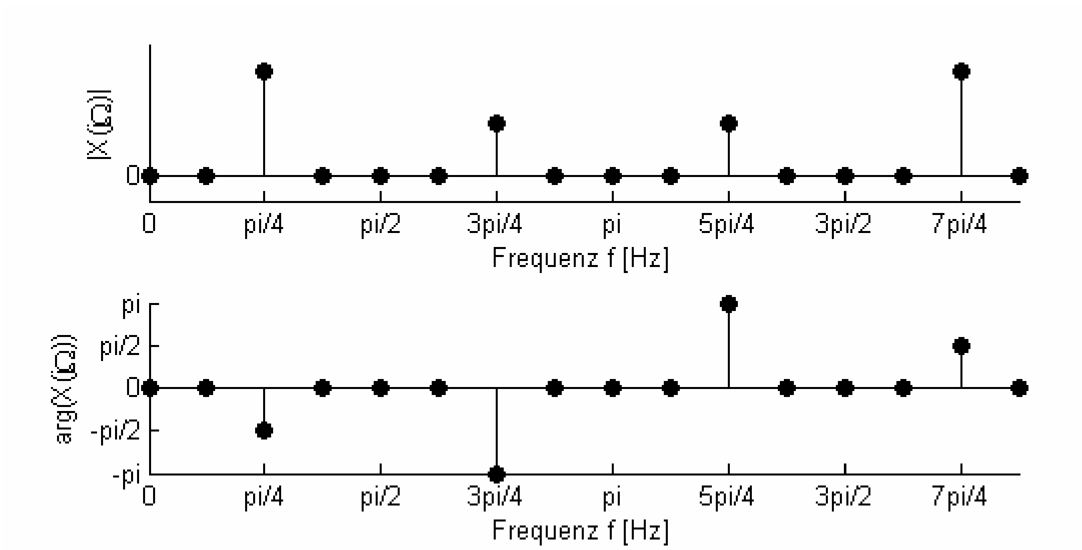
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\sin\left(k\pi - k\frac{2\pi}{N}l\right), \quad \text{mit } -\sin(k\pi+\alpha) = \sin(k\pi-\alpha)$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\left(-\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-l\right)\right)\right)$$

$$= -\operatorname{Im}\left\{X\left[\frac{N}{2}-l\right]\right\}$$

2. Diskrete Fouriertransformation (DFT)

2.1



2.2

$$x[n] = 1\cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} e^{j\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot n} + 0{,}5\cdot e^{j(-\pi)} e^{j\cdot 6\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot n} + 0{,}5\cdot e^{j\pi} e^{j\cdot 10\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot n} + 1\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\cdot 14\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot n}$$

$$= e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} e^{j\cdot\frac{\pi}{4}\cdot n} + 0{,}5\cdot e^{j(-\pi)} e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot n} + 0{,}5\cdot e^{j\pi} e^{j\cdot\frac{5\pi}{4}\cdot n} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\cdot\frac{7\pi}{4}\cdot n}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $e^{jkn} = e^{jkn}\cdot\underbrace{e^{j(-2\pi)n}}_{=1} = e^{j(k-2\pi)n}$ ergibt sich:

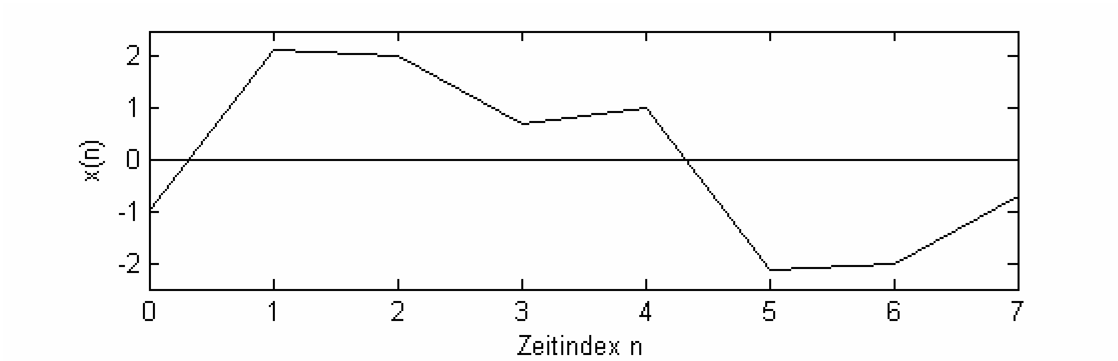
$$x[n]=e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}e^{j\cdot\frac{\pi}{4}\cdot n}+0{,}5\cdot e^{j(-\pi)}e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot n}+0{,}5\cdot e^{j\pi}e^{j\cdot\left(\frac{5\pi}{4}-2\pi\right)\cdot n}+e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot\left(\frac{7\pi}{4}-2\pi\right)\cdot n}$$

$$=\underbrace{e^{j\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot n-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-j\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot n-\frac{\pi}{2}\right)}}_{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n-\frac{\pi}{2}\right)}+\underbrace{0{,}5\cdot e^{j\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n-\pi\right)}+0{,}5\cdot e^{-j\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n-\pi\right)}}_{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n-\pi\right)}$$

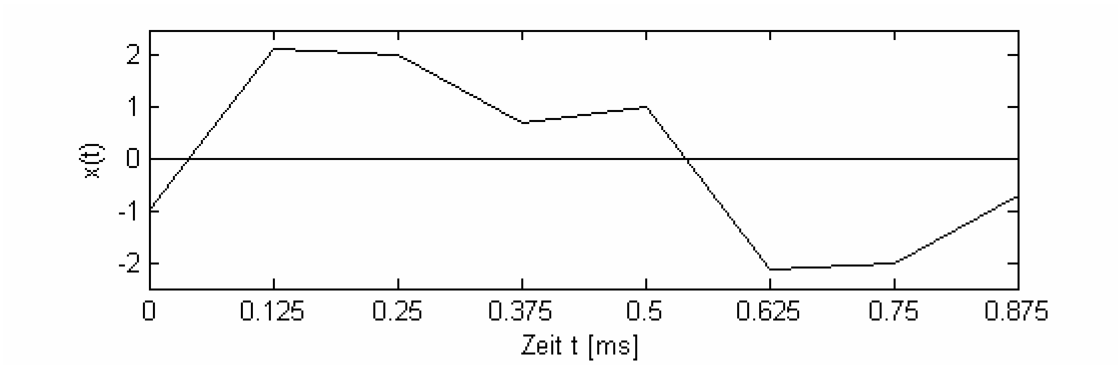
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot n-\pi\right)$$

Die Frequenzen der Kosinus-Terme sind $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$. Der erste Term erreicht demnach nach 8 Samples den Wert 2π, der zweite Term erreicht nach 4 Samples ein Vielfaches von 2π. Demnach beträgt die Periode des Gesamtsignals 8 Samples.

2.3



Unter der Annahme, dass die Frequenzstützstellen einen Abstand von 500 Hz haben, ergibt sich für die höchste Frequenzstützstelle ein Wert von 4000 Hz. Die Abtastrate beträgt somit 8 kHz. Demnach haben die Samples einen Abstand von 1/8000 s = 0,125 ms.



3. Diskrete Fouriertransformation (DFT)

siehe Matlab-File „Aufgabe3.m“