

Einführung in die digitale Signalverarbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl

1. Aufgabenblatt

1. Eigenschaften diskreter Systeme

a. Erläutern Sie die Begriffe

- Linearität
- Zeitinvarianz
- Speicherfreiheit
- Kausalität und
- Stabilität

Linearität:

Ein System wird als linear bezeichnet, wenn für das System das Superpositionsprinzip gilt. Das Superpositionsprinzip besagt, dass die Antwort des Systems auf eine Überlagerung von Eingangssignalen gleich der Überlagerung der Einzelantworten ist. Mathematisch drückt sich das wie folgt aus:

$$S\{u_1[n] + u_2[n]\} = S\{u_1[n]\} + S\{u_2[n]\}$$

Daraus folgt, dass eine Skalierung (Verstärkung oder Abschwächung) des Eingangssignals zu einer ebensolchen Skalierung des Ausgangssignals führt, wie leicht zu zeigen ist:

$$S\{a \cdot u[n]\} = S\left\{\underbrace{u[n] + u[n] + \dots + u[n]}_{a\text{-mal}}\right\} = \underbrace{S\{u[n]\} + S\{u[n]\} + \dots + S\{u[n]\}}_{a\text{-mal}} = a \cdot S\{u[n]\}$$

Oft wird die Linearitätseigenschaft daher auch folgendermaßen ausgedrückt:

$$S\{a_1 \cdot u_1[n] + a_2 \cdot u_2[n]\} = a_1 \cdot S\{u_1[n]\} + a_2 \cdot S\{u_2[n]\}$$

Zeitinvarianz:

Ein System ist zeitinvariant, wenn eine Zeitverschiebung des Inputs zu einer Zeitverschiebung des Outputs führt. Mit anderen Worten: Die Signalform der Systemantwort hängt nicht vom Zeitpunkt des Anlegens des Eingangssignals ab.

In Gleichungsform:

Ist $y[n]$ die Antwort auf ein Signal $x[n]$ ($y[n] = S\{x[n]\}$), dann ist

$$S\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

Speicherfreiheit:

Ein System wird als speicherfrei bezeichnet, wenn sein Output für jeden Wert der unabhängigen Variablen nur vom Input zu dieser Zeit abhängt. Z.B.:

$$y[n] = 5x[n]. \quad n \text{ bezeichnet hierbei den aktuellen Zeitpunkt.}$$

Nicht Speicherfrei wäre demnach folgendes System:

$y[n] = x[n] + x[n-1]$, da der Ausgang des Systems sowohl vom aktuellen, als auch vom vorausgegangenen Sample abhängt.

Kausalität:

Ein System ist kausal, wenn der Output des Systems nur von den Werten des Inputs zur aktuellen Zeit und davor abhängt.

Beispiel: $y[n] = x[n-1] + x[n-2]$ ist kausal, $y[n] = x[n] + x[n+1]$ hingegen nicht.

Stabilität:

Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal antwortet.

$y[n] = 4x[n] + 3x[n-1]$ ist also z.B. ein stabiles System.

Ein Beispiel für ein instabiles System wäre: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$.

Achtung: Ein instabiles System reagiert also nicht unbedingt auf jedes Eingangssignal mit einem unbeschränkten Ausgangssignal.

b. Vier zu betrachtende Systeme werden durch folgende Gleichungen beschrieben. ($x[k]$ = Eingangssignal, $y[k]$ = Ausgangssignal)

$$1. \quad y_1[k] = |x[k]| + x[k - 2]$$

$$2. \quad y_2[k] = 2 \cdot (x[k + 1] - x[k - 1])$$

$$3. \quad y_3[k] = \sum_{i=k-2}^{k+4} x[i]$$

$$4. \quad y_4[k] = k \cdot \sin(x[k])$$

Untersuchen Sie die Systeme bezüglich der in a) genannten Eigenschaften indem Sie prüfen, ob die jeweiligen Bedingungen für alle Eingangssignale $x[k]$ erfüllt sind.

$$1. \quad y_1[k] = |x[k]| + x[k - 2]$$

- nicht speicherfrei
- stabil
- kausal
- nichtlinear

Beweis: Für lineare System gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$$

In unserem Fall gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = |a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]| + (a_1 u_1[n - 2] + a_2 u_2[n - 2])$$

\neq

$$a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} = a_1 (|u_1[n]| + u_1[n - 2]) + a_2 (|u_2[n]| + u_2[n - 2])$$

$$= a_1 |u_1[n]| + a_2 |u_2[n]| + a_1 u_1[n - 2] + a_2 u_2[n - 2]$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k + m]$.

Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k + m]$ ist:

$$y_2[k] = S\{x_2[k]\}$$

$$= |x_2[k]| + x_2[k - 2]$$

$$= |x_1[k + m]| + x_1[k + m - 2]$$

$$= y_1[k + m]$$

$$2. \quad y_2[k] = 2 \cdot (x[k + 1] - x[k - 1])$$

- nicht speicherfrei
- stabil

- nicht kausal
- linear

Beweis: Für lineare System gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned} S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} &= 2 \cdot ((a_1 u_1[n+1] + a_2 u_2[n+1]) - (a_1 u_1[n-1] + a_2 u_2[n-1])) \\ &= 2 \cdot (a_1 u_1[n+1] - a_1 u_1[n-1]) + 2 \cdot (a_2 u_2[n+1] - a_2 u_2[n-1]) \\ &= a_1 \cdot \underbrace{2 \cdot (u_1[n+1] - u_1[n-1])}_{S\{u_1[n]\}} + a_2 \cdot \underbrace{2 \cdot (u_2[n+1] - u_2[n-1])}_{S\{u_2[n]\}} \\ &= a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} \end{aligned}$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.

Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

$$\begin{aligned} y_2[k] &= S\{x_2[k]\} \\ &= 2 \cdot (x_2[k+1] - x_2[k-1]) \\ &= 2 \cdot (x_1[k+m+1] - x_1[k+m-1]) \\ &= y_1[k+m] \end{aligned}$$

3.
$$y_3[k] = \sum_{i=k-2}^{k+4} x[i]$$

- nicht speicherfrei
- stabil
- nicht kausal
- linear

Beweis: Für lineare System gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$$

In unserem Fall gilt:

$$\begin{aligned} S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} &= \sum_{i=k-2}^{k+4} (a_1 u_1[i] + a_2 u_2[i]) \\ &= a_1 \cdot \underbrace{\sum_{i=k-2}^{k+4} u_1[i]}_{u_1[n]} + a_2 \cdot \underbrace{\sum_{i=k-2}^{k+4} u_2[i]}_{u_2[n]} \\ &= a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} \end{aligned}$$

- zeitinvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.

Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

$$\begin{aligned}
y_2[k] &= S\{x_2[k]\} \\
&= \sum_{i=k-2}^{k+4} x_2[k] \\
&= \sum_{i=k-2}^{k+4} x_1[k+m] \\
&= y_1[k+m]
\end{aligned}$$

4. $y_4[k] = k \cdot \sin(x[k])$

- speicherfrei
- instabil
- kausal
- nichtlinear

Beweis: Für lineare System gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\}$$

In unserem Fall gilt:

$$S\{a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n]\} = n \cdot \sin(a_1 u_1[n] + a_2 u_2[n])$$

≠

$$a_1 S\{u_1[n]\} + a_2 S\{u_2[n]\} = a_1 \cdot n \cdot \sin(u_1[n]) + a_2 \cdot n \cdot \sin(u_2[n])$$

- zeitvariant

Beweis: Sei $y_1[k] = S\{x_1[k]\}$ und $x_2[k] = x_1[k+m]$.

Wir überprüfen nun, ob $S\{x_2[k]\} = y_1[k+m]$ ist:

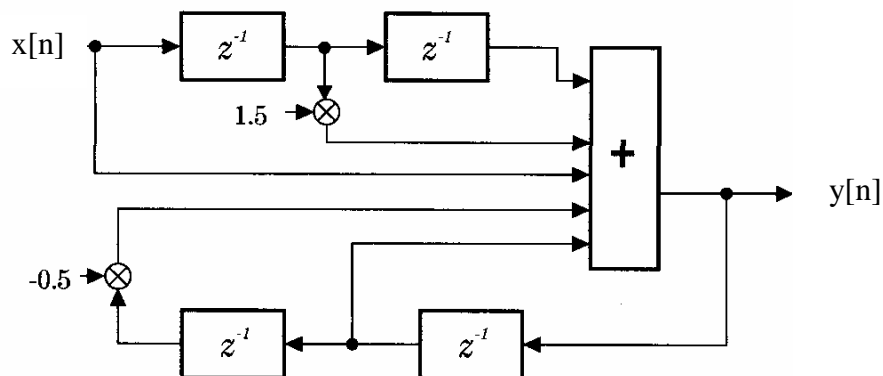
$$\begin{aligned}
y_2[k] &= S\{x_2[k]\} \\
&= k \cdot x_2[k] \\
&= k \cdot x_1[k+m]
\end{aligned}$$

≠

$$y_1[k+m] = (k+m) \cdot x_1[k+m]$$

2. Systemanalyse

Gegeben sei folgendes System:



- a. Bestimmen Sie die Differenzgleichung des Systems.

$$y[n] = x[n] + 1.5 \cdot x[n-1] + x[n-2] + y[n-1] - 0.5 \cdot y[n-2]$$

- b. Charakterisieren Sie das System (Linearität, Kausalität, Ordnung, rekursiv/nichtrekursiv, FIR/IIR).

Das System ist

- linear
- kausal
- ein System 2. Ordnung
- rekursiv
- hat eine unendlich ausgedehnte Impulsantwort (IIR)

- c. Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzgleichung die ersten 10 Werte der Impulsantwort des Systems. Zu Beginn sei das System im Ruhezustand.

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] + 1.5 \cdot x[-1] + x[-2] + y[-1] - 0.5 \cdot y[-2] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= x[1] + 1.5 \cdot x[0] + x[-1] + y[0] - 0.5 \cdot y[-1] \\ &= 0 + 1.5 \cdot 1 + 0 + 1 - 0.5 \cdot 0 \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[2] &= x[2] + 1.5 \cdot x[1] + x[0] + y[1] - 0.5 \cdot y[0] \\ &= 0 + 1.5 \cdot 0 + 1 + 2.5 - 0.5 \cdot 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= x[3] + 1.5 \cdot x[2] + x[1] + y[2] - 0.5 \cdot y[1] \\ &= 0 + 1.5 \cdot 0 + 0 + 3 - 0.5 \cdot 2.5 \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
y[4] &= y[3] - 0.5 \cdot y[2] = 1.75 - 0.5 \cdot 3 = 0.25 \\
y[5] &= y[4] - 0.5 \cdot y[3] = 0.25 - 0.5 \cdot 1.75 = -0.625 \\
y[6] &= y[5] - 0.5 \cdot y[4] = -0.625 - 0.5 \cdot 0.25 = -0.75 \\
y[7] &= y[6] - 0.5 \cdot y[5] = -0.75 - 0.5 \cdot (-0.625) = -0.4375 \\
y[8] &= y[7] - 0.5 \cdot y[6] = -0.4375 - 0.5 \cdot (-0.75) = -0.0625 \\
y[9] &= y[8] - 0.5 \cdot y[7] = -0.0625 - 0.5 \cdot (-0.4375) = -0.15625
\end{aligned}$$

- d. Programmieren Sie das System und überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil c. Schreiben Sie dazu eine Matlab-Funktion, die einen Eingangsvektor x als Argument erhält und einen entsprechenden Ausgangsvektor y liefert. Verlängern Sie, um den anfänglichen Ruhezustand zu realisieren, Ein- und Ausgangsvektor um 2 Nullen, benutzen Sie zur Iteration eine FOR-Schleife und speichern Sie die Funktion als m-file mit einem selbstgewählten Namen ab.

→ siehe Matlab-Files „Uebung1_Aufgabe2.m“ und „system.m“

3. Eulersche Beziehung

- a. Stellen Sie ein Sinussignal von 0 bis 6π mit 32 Abtastwerten pro Periode dar.
- b. Stellen Sie die zugehörige komplexe Exponentialfolge in der komplexen Ebene (also Imaginärteil auf der Y-Achse, Realteil auf der X-Achse) sowie als Realteil, Imaginärteil und Betrag in Abhängigkeit vom Zeitindex k dar.
- c. Nutzen Sie die Eulersche Beziehung und erzeugen Sie unter Verwendung der komplexen Exponentialfolge eine Sinusfolge und vergleichen Sie diese mit der Sinusfolge aus Aufgabenteil a.

→ siehe Matlab-File „Uebung1_Aufgabe3.m“