

**Musterlösung: 14. November 2013, 10:51**

## 1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Quantisierungsfehlers

Der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) des Quantisierungsfehlers ist bei Vollaussteuerung und ausreichender Bittiefe des A/D-Wandlers gleichverteilt im Bereich  $-\Delta/2 \leq x \leq \Delta/2$ .

a) Zeigen Sie den Übergang von nicht gleichverteilter zu gleichverteilter WDF, indem sie ein 997 Hz Sinus Signal (Dauer 1 s,  $f_s = 44.1$  kHz), mit 3, 6 und 9 bit quantisieren und die WDF des Quantisierungsfehlers darstellen.

**Lösung:**

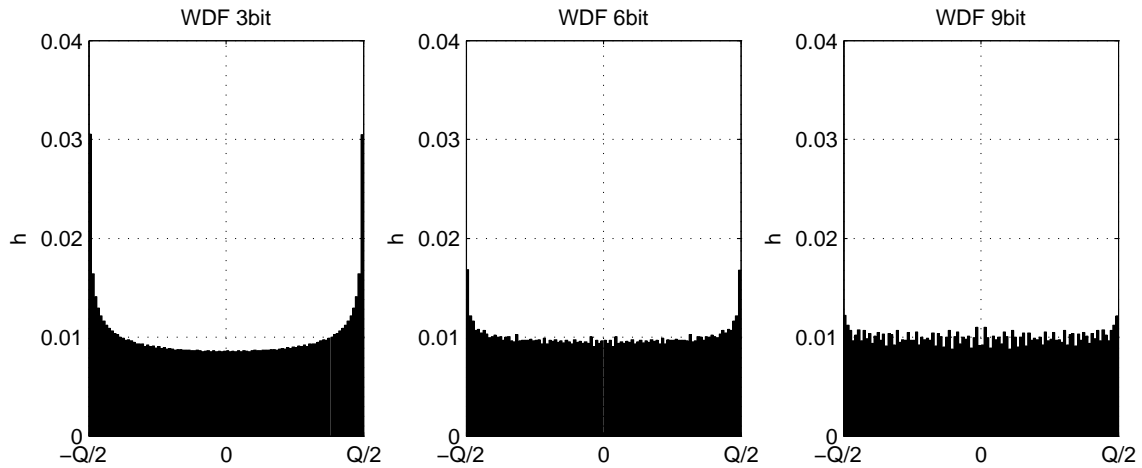
```
%% a)
% Signal erzeugen
fs = 44100;
f1 = 997;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
N = [3 6 9];

% figure fuer plot erzeugen
hFigureHandle = figure;
set(hFigureHandle, 'PaperUnits', 'centimeters');
set(hFigureHandle, 'Units', 'centimeters');
% paper size for printing
set(hFigureHandle, 'PaperSize', [22 8]);
% location on printed paper
set(hFigureHandle, 'PaperPosition', [.1 .1 22-.1 8-.1]);
% location and size on screen
set(hFigureHandle, 'Position', [0 0 22 8]);
% set color
set(hFigureHandle, 'color', [1 1 1])

for n = 1:3
    LSB = 2^(N(n)-1);
    % Normalisierung, damit der Quantisierungsfehler <= LSB/2 ist.
    y = (1-LSB/2) * sin(2*pi*f1*t);
    [yQtread, yEtread] = xquant(y, N(n), 'mid-tread');
    [H, intervallmitten] = hist(yEtread, 100);
    h = H/sum(H);

    % Histogramm des Quantisierungsfehlers
    subplot(1,3,n)
        bar(intervallmitten, h, 'FaceColor', 'k', 'EdgeColor', 'k')
        axis([-LSB/2 LSB/2 0 .04])
        set(gca, 'xTick', [-LSB/2 0 LSB/2], 'xTickLabel', {'-Q/2' '0' 'Q/2'}, ...
            'yTick', 0:.01:.04)
        grid on
        title(['WDF ' num2str(N(n)) 'bit'])
        ylabel('h')
end
```

```
% print('-dpdf', '-r300', 'quantisierungsfehler_wdf.pdf')
```



b) Veranschaulichen Sie, wie es zu der Gleichverteilung des Quantisierungsfehlers kommt.

**Lösung:**

In den Abbildungen ist auf der linken Seite jeweils die WDF eines analogen Signals gegeben. Die Intervalle innerhalb derer auf einen Wert quantisiert wird sind mit gestrichelten Linien gekennzeichnet; die Werte auf die quantisiert wird mit einer durchgezogenen Linie. Die WDF des Quantisierungsfehlers entspricht nun intervallweise der WDF des analogen Signals. Dementsprechend kann die WDF des Fehlers als intervallweise Addition der WDF des analogen Signals dargestellt werden (rechte Seite). Durch die Quantisierung des analogen Signals mit 2, bzw. 3 Bit wird deutlich, dass nur bei einer ausreichenden Anzahl an Quantisierungsstufen von einer gleichverteilten WDF des Fehlers ausgegangen werden kann.

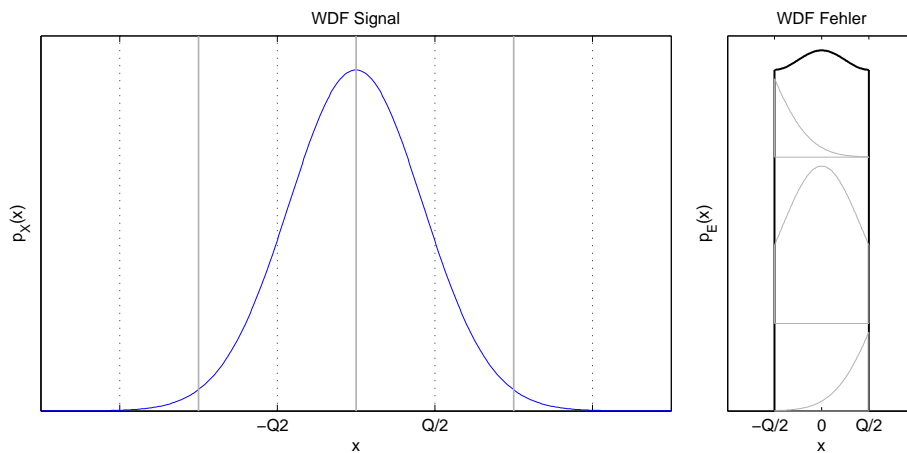


Abbildung 1: WDF von Signal und Quantisierungsfehler bei 2-Bit Quantisierung

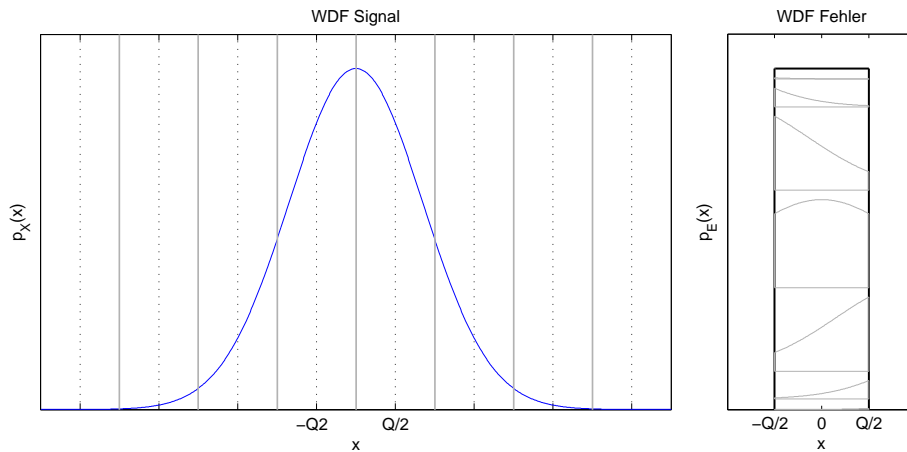


Abbildung 2: WDF von Signal und Quantisierungsfehler bei 3-Bit Quantisierung

## 2 Dither

a) Erweitern Sie die Funktion `xquant` so, dass die Möglichkeit besteht, einen gleich- oder dreiecksverteilten Dither zum Eingangssignal zu addieren. Dieser soll die Amplitude  $-0,5$  LSB bis  $0,5$  LSB für den gleich- und  $-1$  LSB bis  $1$  LSB für den dreiecksverteilten Fall haben.

b) Stellen Sie das Ergebnis der Quantisierung für ein Sinussignal im Zeit- und Frequenzbereich und plotten Sie außerdem die Häufigkeitsverteilung des Quantisierungsfehlers. Geben Sie das Signal über ihre Soundkarte wieder.

**Lösung:**

```
%% b)
close all; clear; clc

% Signal erzeugen
fs = 44100;
f1 = 500;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
y = sin(2*pi*f1*t);

% Erneutes Quantisieren mit Ditherung
[yQtreadR, yEtreadR, yDtreadR, codebook] = xquant(y, 3, 'mid-tread', 'rect');
[yQtreadT, yEtreadT, yDtreadT, codebook] = xquant(y, 3, 'mid-tread', 'tri');

%% Plot im Zeitbereich

% Plot im Zeitbereich ueber 1 Periodenlaengen
index = ceil(fs/f1);

figure(5) % figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(t(1:index), yDtreadR(1:index), t(1:index), yQtreadR(1:index), ...
      t(1:index), yEtreadR(1:index))
title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie und rect-dither')
grid on
subplot(2,1,2)
plot(t(1:index), yDtreadT(1:index), t(1:index), yQtreadT(1:index), ...
      t(1:index), yEtreadT(1:index))
```

```

    title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie und tri-dither')
    grid on

%% Spektren berechnen
Y = fft(y)/max(fft(y));
YQtreadR = fft(yQtreadR)/max(fft(yQtreadR));
YQtreadT = fft(yQtreadT)/max(fft(yQtreadT));
N = length(y);
f_index = 0:fs/N:fs-fs/N;    % Frequenzindex bis fs

% Spektren plotten
figure(6) % figure(2)
subplot(3,1,1)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(Y)))
    axis([20 fs/2 -350 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum eines Sinussignals 500 Hz')
subplot(3,1,2)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(YQtreadR)))
    axis([20 fs/2 -100 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum nach mid-tread Quantisierung und rect-dither')
subplot(3,1,3)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(YQtreadT)))
    axis([20 fs/2 -100 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum nach mid-tread Quantisierung und tri-dither')

%% Histogramme plotten

figure(7) % figure(4)
subplot(2,1,1)
    hist(yEtreadR, 100)
    xlim([-0.35 0.35])
    title('Amplitudenverteilung f?r mid-tread Quantisierung und rect-dither')
    xlabel('xEtread')
    ylabel('h')
subplot(2,1,2)
    hist(yEtreadT, 100)
    xlim([-0.35 0.35])
    title('Amplitudenverteilung f?r mid-tread Quantisierung und tri-dither')
    xlabel('xErised')
    ylabel('h')

%% Probehalter: Quantisierung eines Sprachsignals
clear; clc

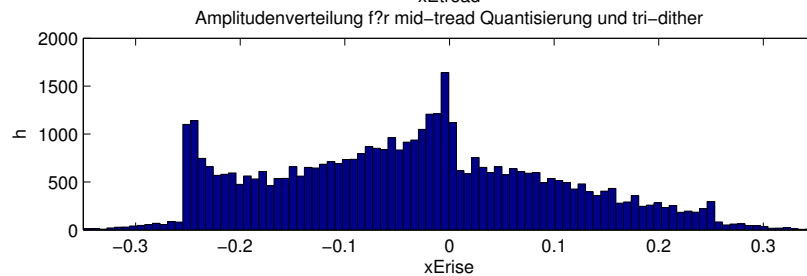
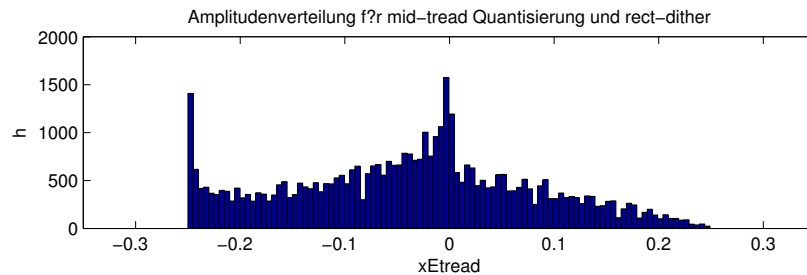
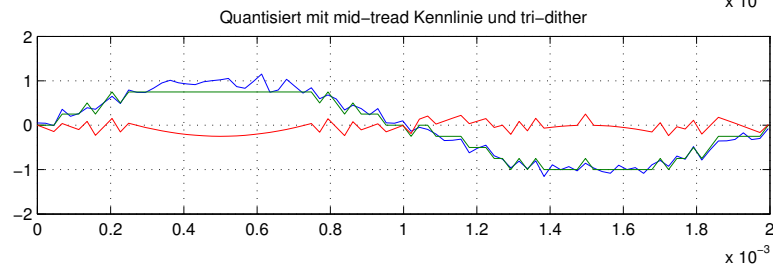
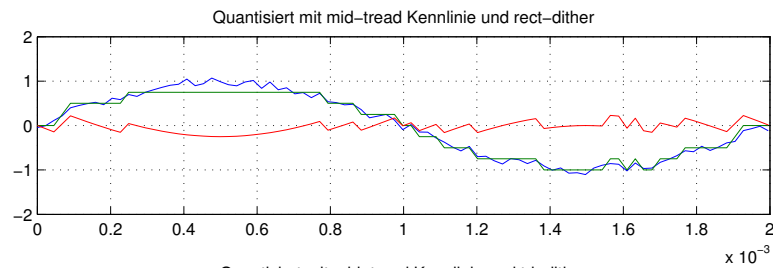
[x, fs] = wavread('SprecherDeutschNachhallfrei.wav');
x = mean(x(1:4*44100, :), 2);

xQ      = xquant(x, 3, 'mid-tread');
xQ_rect = xquant(x, 3, 'mid-tread', 'rect');
xQ_tri  = xquant(x, 3, 'mid-tread', 'tri');

%%
soundsc(xQ, fs)
soundsc(xQ_rect, fs)

```

```
soundsc(xQ_tri, fs)
soundsc(x, fs)
```



Durch die Ditherung wird der Zusammenhang zwischen Eingangss- und Ausgangssignal aufgehoben. Der Quantisierungsfehler nähert sich dadurch einem Zufallssignal an. Das lassen auch die Histogramme vermuten, die einer Dreiecksverteilung ähneln. Der tri-Dither sorgt dafür, dass es auch an den Rändern eines Quantisierungsintervalles Amplitudenübergänge gibt, was beim Minimum der Sinusschwingung zu sehen ist. Im Spektrum sind für beide Dithertechniken zwar noch Verzerrungen zu erkennen, diese sind aber nicht mehr hörbar und verschwinden im Rauschteppich, mit dem die Dekorellation von Eingang und Fehlersignal bezahlt werden muss.

