Musterlösung: 5. November 2013, 18:25

1 Autokorrelation, Leistung und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines Sinussignals

Bei stochastischen Signalen kann die Autokorrelationsfunktion (AKF) ebenfalls als Erwartungswert ausgedrückt werden:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\{X_t \cdot X_{t-\tau}\}$$

Bei periodischen Signalen kann die Berechnung der AKF auch im Zeitbereich durch Integration über eine Periode erfolgen:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot x(t-\tau)\mathrm{d}t$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Gleichung die AKF eines Sinussignals $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ und erläutern Sie anhand des Ergebnisses die Eigenschaften der AKF.
(Hilfe: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$)
Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot x(t-\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T A\sin(\omega\tau) \cdot A\sin(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(\omega t - (\omega(t-\tau))) - \cos(\omega t + (\omega(t-\tau)))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t - \omega\tau)\,\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \frac{A^2}{2T}\cos(\omega\tau)t\Big|_0^T = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)
\end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion eines Sinussignals ist ein Cosinussignal. Dies stimmt mit der Symmetrieeigenschaft der AKF überein sowie mit der Tatsache, dass zu einer periodischen Zeitfunktion eine ebenfalls periodische AKF gehört. Ersichtlich wird zudem, dass die AKF an der Stelle 0 maximal ist, wobei sich die Maxima mit jeder Periode wiederholen. Ohne Verschiebung ($\tau = 0$) ist die Funktion sich selbst am ähnlichsten, durch ihre Periodizität stimmt sie zusätzlich am Anfang jeder Periode wieder mit sich selbst überein.

b) Berechnen Sie die Leistung des Signals mit Hilfe der AKF und auf anderem Weg. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
Lösung: Die Leistung eines Signals ergibt sich durch Berechnung der AKF an der Stelle $\tau = 0$. Für den Sinus ist das:

$$\varphi_{xx}(\tau = 0) = P = \frac{A^2}{2} \tag{1}$$

Die Leistung kann im Zeitbereich auch ohne den Umweg der Autokorrelation berechnet werden, indem der quadrierte Sinus über eine Periodendauer integriert wird:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Das Integral kann mit Hilfe des Additionstheorems $\left(\int uv' = uv - \int u'v\right)$ gelöst werden $(u' = \omega\cos(\omega t)$ und $v = -1/\omega\cos(\omega t))$:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\left|-\frac{1}{\omega}\sin(t)\cos(t)\right|_0^T + \int_0^T \frac{\omega}{\omega}\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\ \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\underbrace{\left|-\frac{1}{\omega}\sin(t)\cos(t)\right|_0^T}_{=0} + \int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems $\left(\cos^2 + \sin^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 = 1 - \sin^2\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\int_0^T 1\,\mathrm{d}t - \int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\ 2\cdot\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}t\Big|_0^T \\ \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Beide Berechnungsmethoden ergeben also ein übereinstimmendes Ergebnis.

c) Erzeugen Sie in Matlab ein Sinus-Signal mit einer Periodendauer von 44100 Samples und einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz und stellen Sie dessen WDF dar. Überlegen Sie dafür, wie Gl. 2 für den zeit- und wertediskreten Fall aussieht.

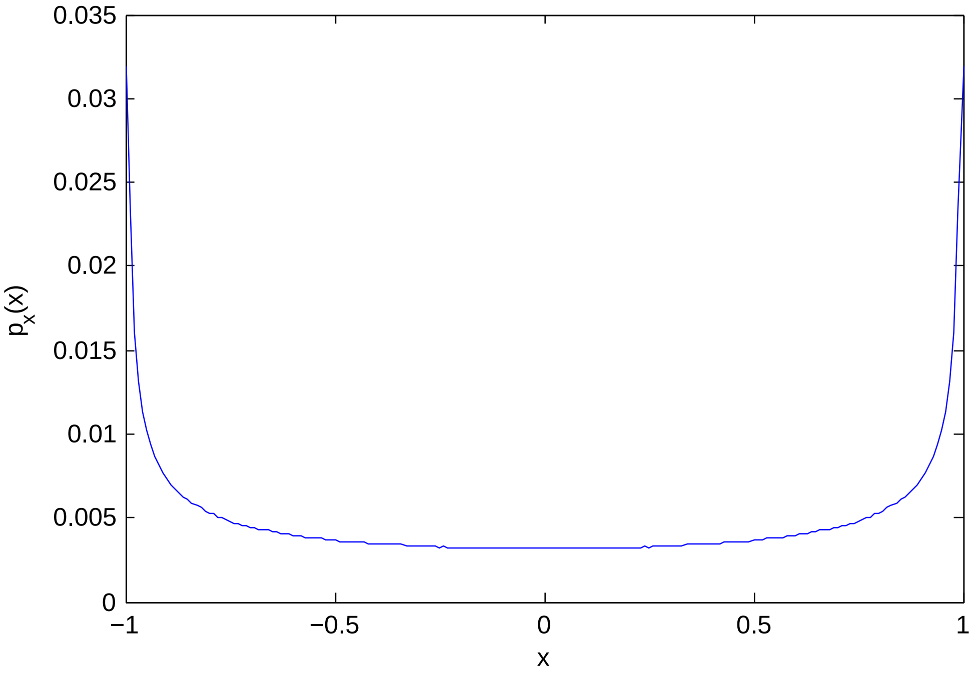
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2}$$

Lösung: Aus dem Integral wird eine Summe über die Auftretenswahrscheinlichkeiten der diskreten Amplitudenstufen:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Der Sinus, im kontinuierlichen Fall durch $A\sin(\omega t)$ gegeben, wird im diskreten Fall zu $A\sin(\Omega\, n)$, wobei $\Omega = 2\pi f/f_s$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

```matlab
%% c)
% Abtastfrequenz, Frequenz, diskreter Zeitvektor und Amplitude
fs = 44100;
f  = 1;
n  = 1:44100;
A  = 1;

% Sinus
x = A*sin(2*pi*f/fs * n);

% Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion
amp = -A:.01:A;

[H] = hist(x, amp);
h   = H/sum(H);

plot(amp, h)
xlabel 'x'
ylabel 'p_x(x)'
```



d) Berechnen Sie die Leistung des Sinus-Signals mit Hilfe der WDF

Lösung:

Die Leistung ist für mittelwertfreie Signale über den Erwartungswert 2. Ordnung gegeben:

$$E\left\{X^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

Für den zeit- und wertediskreten Fall wird das Integral zu einer Summe:

$$E\left\{X^2\right\} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \, p_i$$

```
%% d)
% Berechnung der Leistung
P = sum(amp.^2.*h)
```

Matlab-Funktionen: hist, sin

2 Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum von Rauschen

Die Autokorrelationsfunktion eines Signals ist definiert als der Erwartungswert des Produktes zweier Amplitudenwerte desselben Zufallssignals zu unterschiedlichen Zeitpunkten und hängt bei stationären Signalen nur von der Verschiebung dieser Zeitpunkte zueinander ab:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\{X_t \cdot X_{t-\tau}\}$$

Ihre Fouriertransformierte, das Leistungsdichtespektrum, liefert Informationen über die spektrale Verteilung der Leistung eines Signals. Gegeben sei ein bandbegrenztes, weißes Rauschsignal mit dem Leistungsdichtespektrum

$$S_{xx}(\omega) = \begin{cases} S_0 & , |\omega| \leqslant \omega_0 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Leistung des Rauschsignals
Lösung: Die Leistung kann über das Leistungsdichtespektrum berechnet werden

$$P = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Hier ist dann:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} S_0\,\mathrm{d}\omega = \frac{S_0}{2\pi}\omega\bigg|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{2\omega_0 S_0}{2\pi} = 2\frac{2\pi f_0 S_0}{2\pi} = 2S_0 f_0$$

b) Berechnen Sie die Autokorrelation $\varphi_{xx}(\tau)$ des Signals
Lösung: Die Autokorrelation ist die inverse Fouriertransformierte des Leistungsdichtespektrums

$$\varphi_{xx}(\tau) = F^{-1}\{S_{xx}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

In unserem Fall ist also:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) &= \frac{S_0}{2\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega = \frac{S_0}{2\pi}\left(\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} \cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}\omega + j \underbrace{\int\limits_{-\omega_0}^{\omega_0} \sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\omega}_{=0} \right) \\ &= \frac{S_0}{2\pi\tau}\sin(\omega\tau)\bigg|_{-\omega_0}^{\omega_0} = S_0\frac{\sin(\omega_0\tau) - \sin(-\omega_0\tau)}{2\pi\tau} \end{aligned}$$

wegen der Symmetrie des Sinus ($sin(x) = -sin(-x)$) kann vereinfacht werden:

$$S_0 \frac{2\sin(\omega_0\tau)}{2\pi\tau} = S_0 \frac{f_0}{f_0} \cdot \frac{2\sin(2\pi f_0 \tau)}{2\pi\tau} = 2S_0 f_0 \cdot \frac{\sin(2\pi f_0 \tau)}{2\pi f_0 \tau} = 2S_0 f_0 \,\mathrm{si}(\omega_0\tau)$$

c) Bestimmen Sie aus der AKF die Leistung des Signals und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert aus a).
Lösung: Die Leistung ist gleich der AKF an der Stelle $\tau = 0$.

$$P = \varphi_{xx}(\tau = 0) = 2S_0 f_0$$

Beide Berechnungsmethoden führen auf ein identisches Ergebnis.

d) Geben Sie die AKF desselben Signals an, diesmal für einen nicht Bandbegrenzten Fall. Wie interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu Aufgabe b)?
Lösung: Geht ω_0 gegen Unendlich, geht die Si-Funktion in einen Deltaimpulse über:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{f_0 \to \infty} 2S_0 f_0 \mathrm{si}(\omega_0 \tau) = 2S_0 f_0 \,\delta(\tau)$$

Die Leistung des nicht Bandbegrenzten Rauschens kann der AKF an der Stelle $\tau = 0$ entnommen werden und ist unendlich groß. Die si-Funktion aus Aufgabe b) ist im Vergleich dazu eine Annäherung an den Delta-Impuls, wie sie in der Realität vorkommt.

3 Quantisierung

a) Erzeugen Sie ein Sinussignal mit $f = 500\ Hz$ der Länge $1\ s$, tasten Sie es mit einer Abtastrate $f_s = 44,1\ kHz$ ab. Schreiben Sie eine Funktion mit folgenden Parametern, die das Signal quantisiert.

xQ = xquant(x, nbits, method)

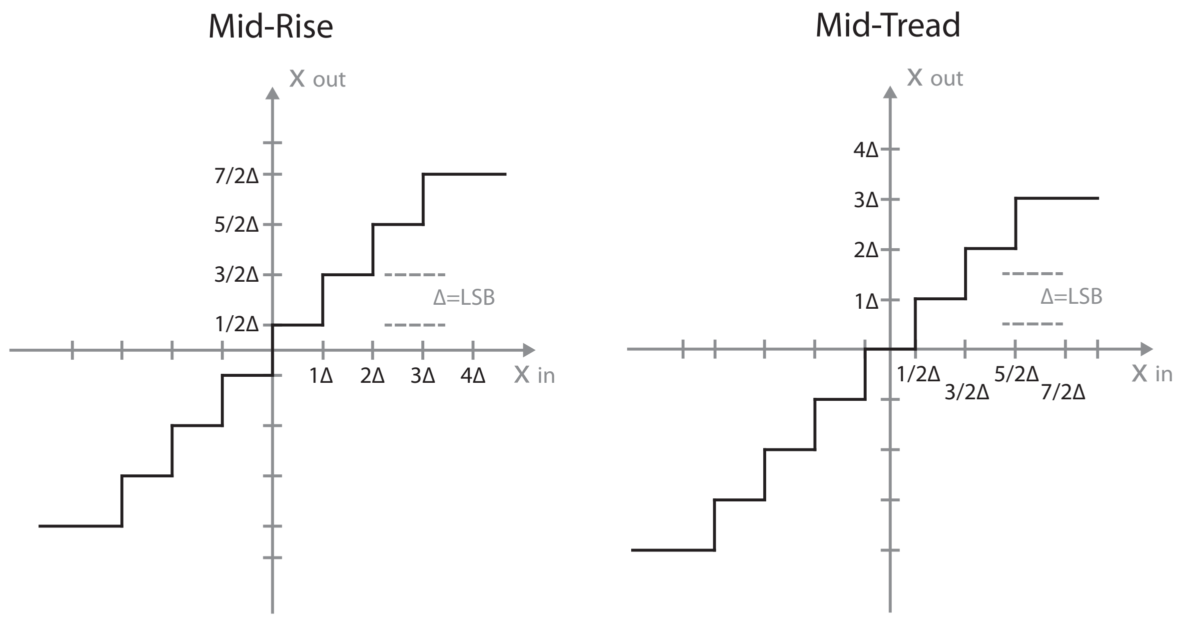
„method“ soll dabei ein Parameter für die Art der Quantisierungskennlinie sein (mid-tread bzw. mid-rise), „nbit“ die zur Quantisierung benutzte Wort-breite und „x“ das Signal selbst. Überlegen Sie zunächst wie die zu implementierenden Quantisierungskennlienen zu beschreiben sind.
Lösung: Die Funktion xquant ist am Ende der Aufgabe angegeben...
Die Kennlinien sind durch die Bittiefe n, die Anzahl der Quantisierungsstufen $N = 2^n$, die Stufengröße Δ, bzw LSB (Least Significant Bit) und die Lage der Kennlinie Beschrieben. Die Stufengröße ergibt sich zu:

$$\Delta = LSB = \frac{max\,(x_{out}) - min\,(x_{out})}{N}$$

Im fall der digitalen requantisierung, sind die Stufen größen auf x- und y-Achse identisch.

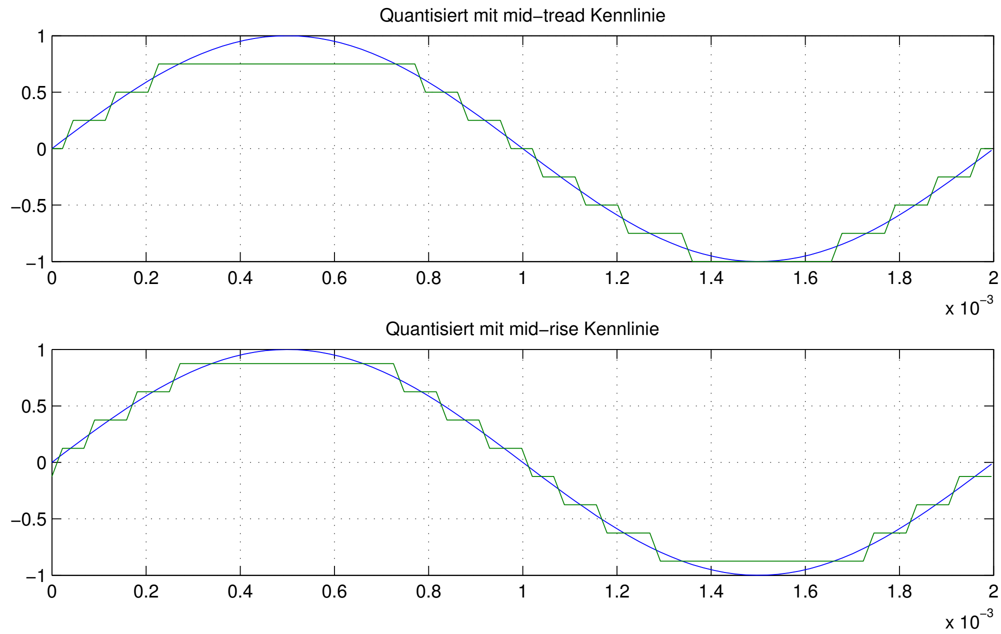
```
%% a)
% Signal erzeugen
fs = 44100;
f1 = 500;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
y = sin(2*pi*f1*t);
```

b) Quantisieren Sie das Signal mit einer Wortbreite von 3 bit. Verwenden Sie hierfür sowohl eine mid-tread, als auch eine mid-rise Kennlinie. Plotten Sie das Originalsignal und die quantisierten Signale im Zeit- und Frequenzbereich.
Lösung:

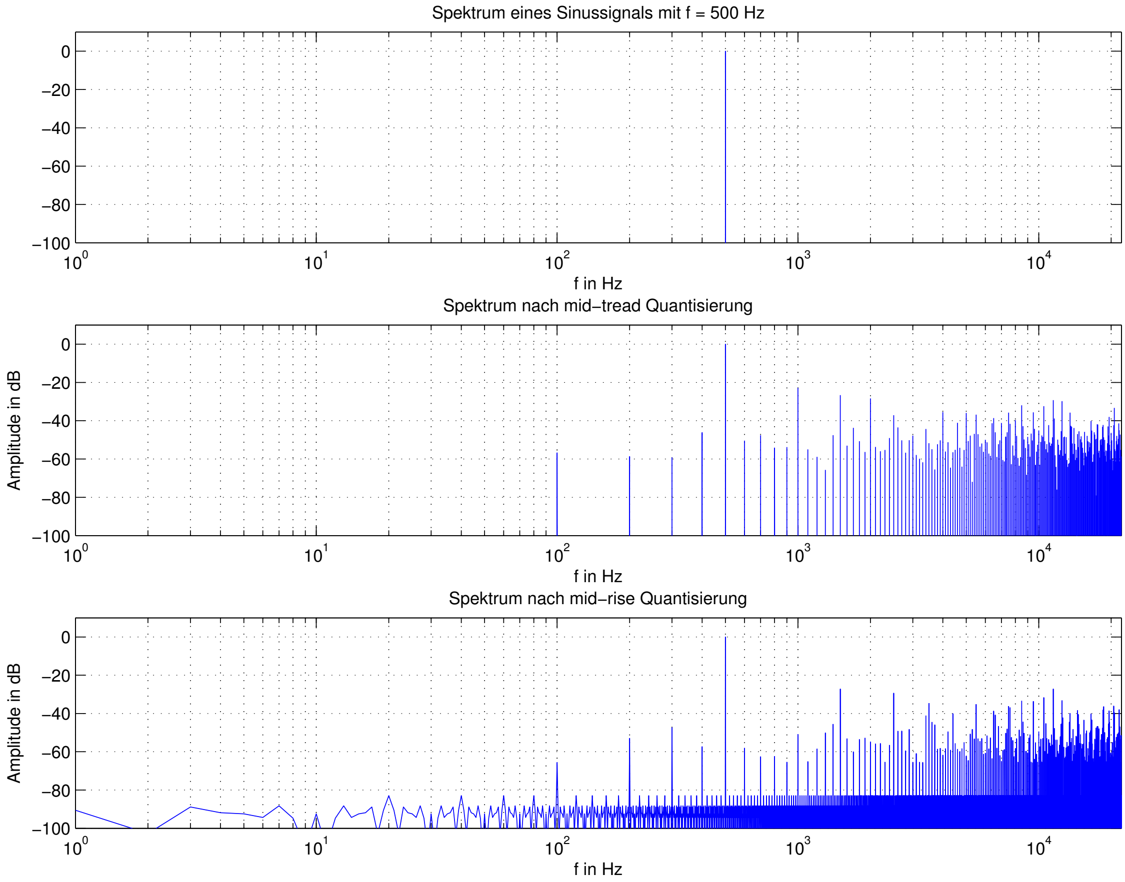



```
%% b)
%  Signal mit 3 bit quantisieren
yQtread = xquant(y, 3, 'mid-tread');
yQrise  = xquant(y, 3, 'mid-rise');

% Plot im Zeitbereich ueber 1 Periodenlaengen
index = ceil(fs/f1);

figure(1)
subplot(2,1,1)
    plot(t(1:index), y(1:index), t(1:index), yQtread(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie')
    grid on
subplot(2,1,2)
    plot(t(1:index), y(1:index), t(1:index), yQrise(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-rise Kennlinie')
    grid on

%% plot im Frequenzbereich
Y       = fft(y) / max(fft(y));
YQtread = fft(yQtread)/ max(fft(yQtread));
YQrise  = fft(yQrise) / max(fft(yQrise));

f = 0:fs/length(t):fs-1/length(t);

subplot(3,1,1)
    semilogx(f, 20*log10(abs(Y)));
    grid on
    axis([0 fs/2 -100 10])
    title('Spektrum eines Sinussignals mit f = 500 Hz')
    xlabel('f in Hz')
subplot(3,1,2)
    semilogx(f, 20*log10(abs(YQtread)));
    grid on
    axis([0 fs/2 -100 10])
    title('Spektrum nach mid-tread Quantisierung')
    xlabel('f in Hz')
```

```
    ylabel('Amplitude in dB')
subplot(3,1,3)
    semilogx(f, 20*log10(abs(YQrise)));
    grid on
    axis([0 fs/2 -100 10])
    title('Spektrum nach mid-rise Quantisierung')
    xlabel('f in Hz')
    ylabel('Amplitude in dB')
```



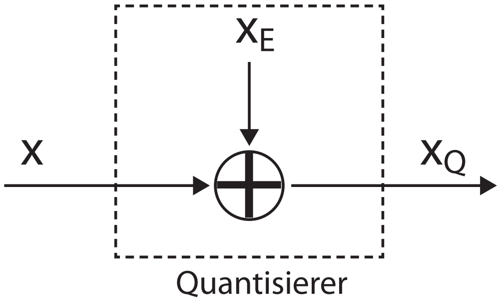
Im Zeitbereich ist zu sehen, dass die mid-rise Kennlinie keinen Quantisierungswert für die 0 aufweist, weswegen sie für die Quantisierung von Audioinhalten, bei denen Amplituden um Null öfter auftreten als andere, ungebräuchlich ist. Die mid-rise Kennlinie hingegen, hat den Nachteil, dass im positiven Amplitudenbereich eine Quantisierungsstufe weniger zu Verfügung steht, als für den negativen.
Das quantisierte Signal weist sehr starke nicht-lineare Verzerrungen auf, die als extrem störend wahrgenommen werden (Spektrum, Hörkontrolle). Die Frequenzen unterhalb der Grundfrequenz kommen durch eine überlagerte Schwingung, hervorgerufen von der Abtastfrequenz, zustande. Es kommen $\frac{f_s}{f} = \frac{44100\ samples/s}{500\ s^-1} = 88.2\ samples$ in einer Periode des Signals vor. Die erste ganze Zahl von Samples tritt nach 5 Perioden des Signals auf und beträgt 441 Samples. Dies ergibt eine Frequenz von $\frac{44100\ samples/s}{441\ samples} = 100\ Hz$, die als tiefste Frequenz im Spektrum auftritt.


Spektrum eines Sinussignals mit f = 500 Hz
f in Hz
Spektrum nach mid−tread Quantisierung
Amplitude in dB
f in Hz
Spektrum nach mid−rise Quantisierung
Amplitude in dB
f in Hz

c) Erweitern sie die Funktion xquant um die Berechnung des Quantisierungsfehlers und plotten Sie dessen zeitlichen Verlauf und die Amplitudenverteilung als Histogram.

Lösung:

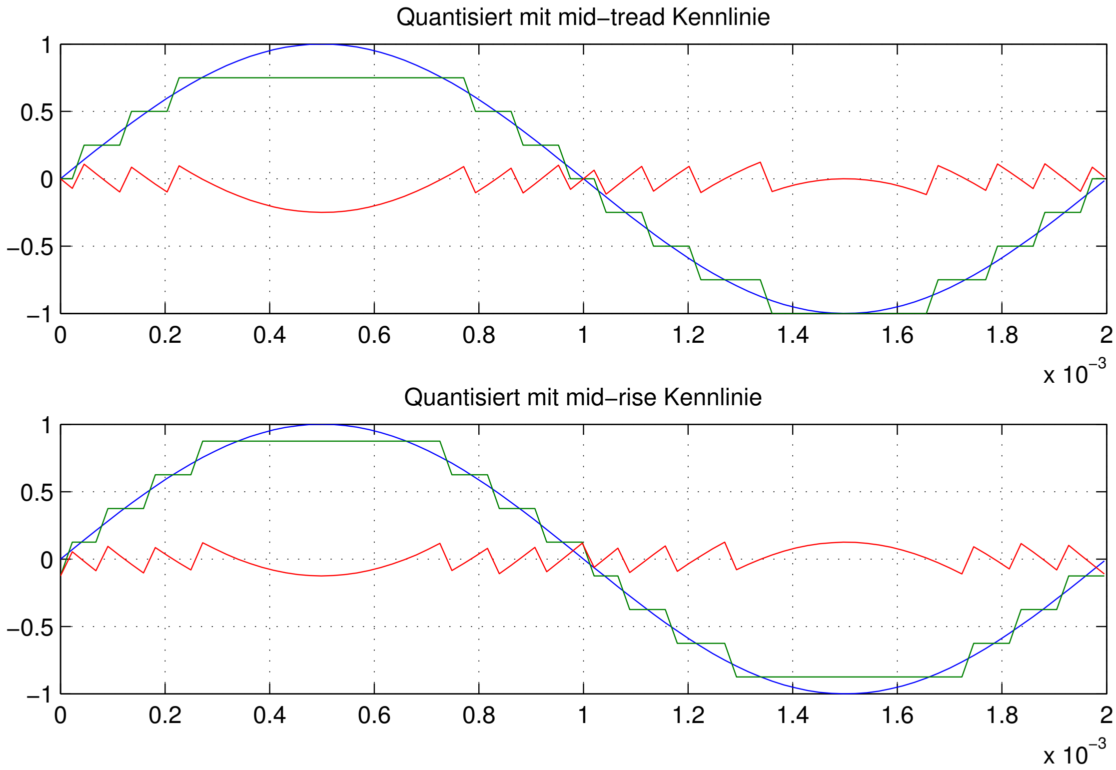
Der Quantisierungsprozess kann durch die Addition eines Fehlersignals zum Eingangssignal betrachtet werden: $x_Q = x + x_E$



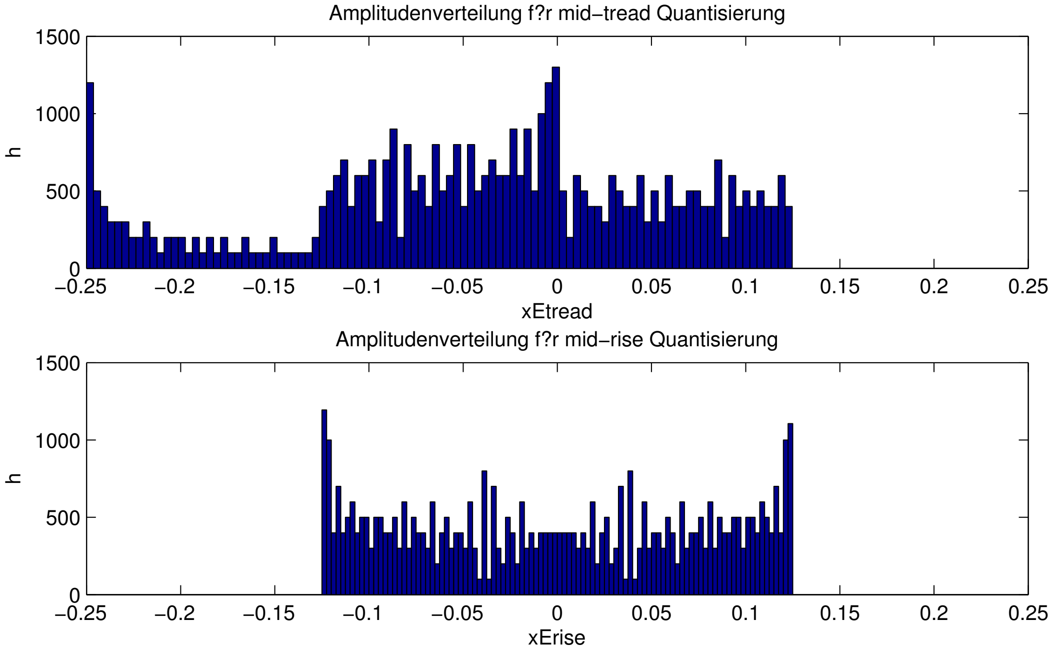
Demnach ist der Quantisierungsfehler definiert als:

$$x_E = x_Q - x$$

```
%% c)
% Erneutes Quantisieren, diesmal mit Quantisierungsfehler als
% Rueckgabeparameter
[yQtread, yEtread] = xquant(y, 3, 'mid-tread');
[yQrise, yErise]   = xquant(y, 3, 'mid-rise');


% Plot der Zeitsignale ueber eine Periode
figure
subplot(2,1,1)
    plot(t(1:index), y(1:index), t(1:index), yQtread(1:index), t(1:index), yEtread(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie')
    grid on
subplot(2,1,2)
    plot(t(1:index), y(1:index), t(1:index), yQrise(1:index), t(1:index), yErise(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-rise Kennlinie')
    grid on

%% Histogram des Quantisierungsfehlers
figure
subplot(2,1,1)
    hist(yEtread, 100)
    xlim([-.25 .25])
    title('Amplitudenverteilung f?r mid-tread Quantisierung')
    xlabel('xEtread')
    ylabel('h')
subplot(2,1,2)
    hist(yErise, 100)
    xlim([-.25 .25])
    title('Amplitudenverteilung f?r mid-rise Quantisierung')
    xlabel('xErise')
    ylabel('h')
```



Es wird deutlich das der rot eingezeichnete Quantisierungsfehler ein selbst ein periodi-sches Signal ist, wodurch die im Spektrum entstandenen Verzerrungen erklärt werden. Für die mid-tread-Quantisierung ist er an einigen Stellen zudem Größer als LSB/2, was an den bereits angesprochenen Eigenschaften der Kennlinie liegt.
Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Quantisierungsfehlers ist nicht gleichverteilt, wie dies bei gut ausgesteuerten Quantisierern und hohen Wortbreiten der Fall ist.



Matlab-Funktionen: function, quantiz, hist, fft