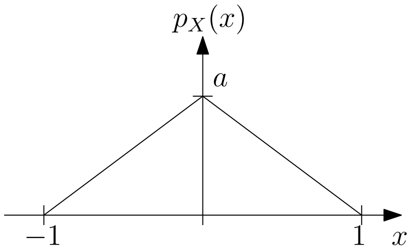
Technische Universität Berlin

Prof. Dr. Stefan Weinzierl 31.10.2011

Musterlösung: 28. Oktober 2013, 22:25

1 Amplitudenstatistik analoger Signale

a) Ein Signal $x(t)$ hat die durch Abb. 1 gegebene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF bzw. PDF), die durch die Punkte $P1(-1|0)$, $P2(0|a)$ und $P3(1|0)$ verläuft. Wählen Sie a so, dass die durch Gl. 1 gegebene Voraussetzung erfüllt ist. Veranschaulichen Sie sich diese Voraussetzung.



$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{dx} = 1 \tag{1}$$

Lösung: Zunächst wird die WDF durch zwei Geradengleichung beschrieben

$$p_X(x) = \begin{cases} ax + a & ,\text{für } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -ax + a & ,\text{für } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Dann kann a berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) &\overset{!}{=} 1 \\
\int_{-1}^{0} ax + a\ dx + \int_{0}^{1} -ax + a\ dx &= 1 \\
a\left(\int_{-1}^{0} x + 1\ dx + \int_{0}^{1} -x + 1\ dx\right) &= 1 \\
a\left(\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1}\right) &= 1 \\
a\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0\right) &= 1 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

Da das Integral die Fläche unter der WDF angibt, kann a auch einfach über den Flächeninhalts eines Dreiecks der Breite 2 und der Höhe a berechnet werden. Die Normierung von Gl. 1 besagt, dass zu jedem Zeitpunkt eine Amplitude auftreten muss.

b) Berechnen Sie das lineare und quadratische Mittel von $x(t)$, sowie dessen Varianz.
Lösung: Der lineare Mittelwert (auch Erwartungswert 1. Ordnung oder 1. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
E\{X\} = & \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx = \mu_x \\
= & \int_{-1}^{0} x(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^2 + x\, dx + \int_{0}^{1} -x^2 + x\, dx \\
= & \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\
= & 0 - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{2} - 0 \\
= & 0
\end{aligned}$$

Der quadratische Mittelwert (auch Erwartungswert 2. Ordnung oder 2. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
E\{X^2\} = & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(-x+1)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^3 + x^2\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x^2\, dx \\
= & \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} \\
= & 0 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{3} - 0 \\
= & \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} \\
= & \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Es zeigt sich schnell, dass die Varianz in diesem Fall gleich dem quadratischen Mittelwert ist:

$$\begin{aligned}
E\{|X - \mu_X|^2\} = & \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_X|^2 \cdot p_X(x)\, dx = \sigma^2 \\
= & \int_{-1}^{1} x^2 \cdot p_x(x)\, dx = E\{X^2\}
\end{aligned}$$

Es kann aber auch allgemein gezeigt werden, dass zunächst linearer und quadratischer Mittelwert berechnet werden können, um anschließend die Varianz zu berechnen (Verschiebungssatz).

$$\begin{aligned}
E\left\{|X - \mu_X|^2\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_x|^2 p_X(x) \mathrm{dx} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) \mathrm{dx}}_{=\mathrm{E}\{\mathrm{X}^2\}} - 2\mu_\mathrm{X} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x) \mathrm{dx}}_{=\mu_\mathrm{X}} + \mu_\mathrm{X}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \mathrm{dx}}_{=1} \\
&= E\left\{X^2\right\} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E\left\{X^2\right\} - \mu_X^2
\end{aligned}$$

c) Veranschaulichen Sie warum Signale mit einer um 0 gerade symmetrischen WDF immer Mittelwertfrei seien müssen.

Lösung: Ist ein Signal mittelwertfrei, hat es einen Mittelwert von. Der Mittelwert ist gegeben durch:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) \mathrm{dx} \tag{2}$$

Abb. 1 veranschaulicht dies. Die gerade symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird durch die Multiplikation mit der ungerade symmetrischen Funktion $y = x$ ebenfalls ungerade symmetrisch. Dadurch heben sich die Flächenanteile links und rechts der y-Achse gegenseitig auf. Der Mittelwert muss also für diesen Fall immer Null sein.

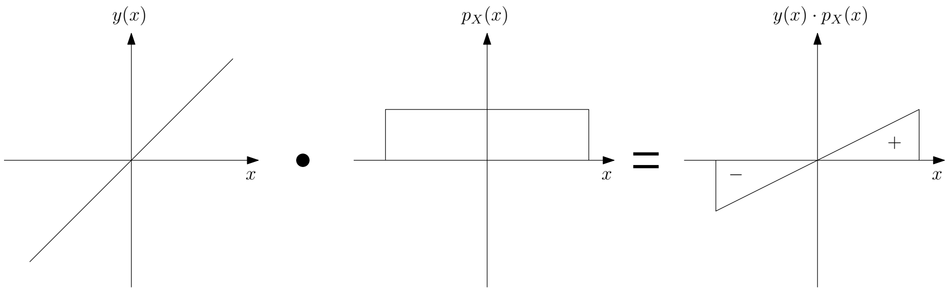


Abbildung 1: Erwartungswert bei gerade symmetrischer WDF

2 Amplitudenstatistik digitaler Audiosignale

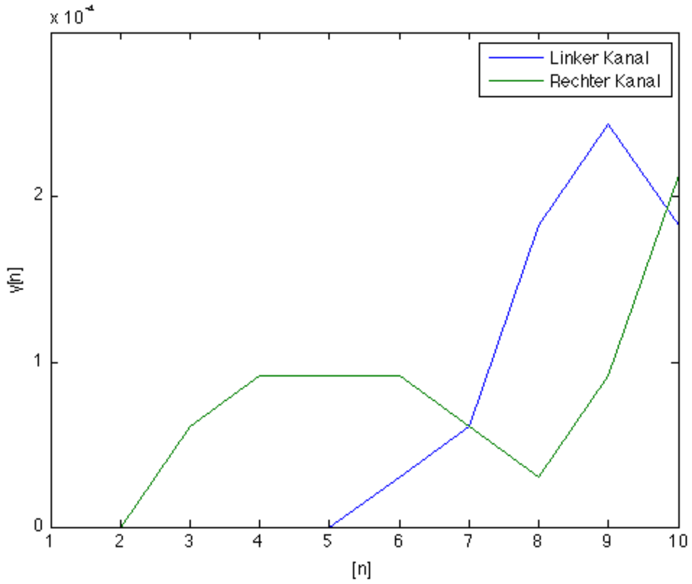
Lesen sie das Audiofile test.wav aus dem Downloadbereich in Matlab ein.

a) Welche Abtastfrequenz, Wortbreite und Länge weist die Audiosequenz auf?
Lösung:

```
%% a)
% Abtastfrequenz und Wortbreite der Audiodatei bestimmen
[y,fs,bits]=wavread('test');
length_y = length(y)/fs;
% --> Fs=44100 --> bits=16 --> 2?Kanalfile --> 6.56 Sekunden lang
```

b) Plotten Sie die Amplituden der ersten 10 Samples für den rechten und linken Kanal.
Lösung:

```
%% b)
figure
plot(y(1:10, :))
legend('Linker Kanal', 'Rechter Kanal')
ylabel 'y[n]';
xlabel '[n]'
```



c) Wie groß ist die Maximalamplitude des Wave-Files für rechten und linken Kanal in dB FS (dB full scale)?
Lösung: Fullscale bezieht sich auf ein voll ausgesteuerte .wav-File, mit einem Wertebereich von $[-1, 1]$. Eine Amplitude von 1 liefert, also einen Wert von 0 $dB\,Fs$.

```
%% c)
% Maximalamplituden des rechten/linken Kanals in dBFS bestimmen
dBFS_links=20*log10(max(abs(y(:,1))));  %--> 0.1778 dBFS
dBFS_rechts=20*log10(max(abs(y(:,2)))); %--> 0.4435 dBFS
```

d) Wie lautet Gl. 3 für ein zeit- und wertediskretes Signal?

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1 \tag{3}$$

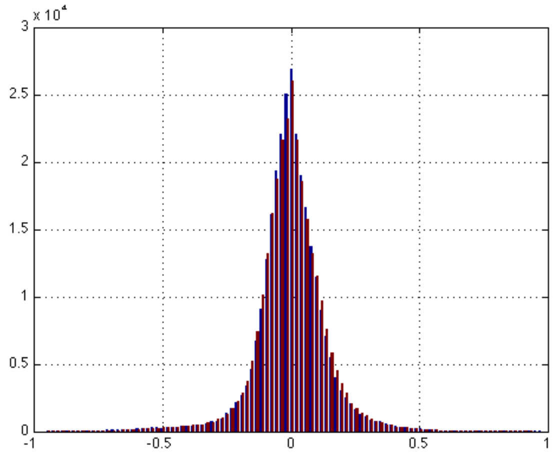
Lösung: Das Integral geht in eine Summe, die über die Wahrscheinlichkeiten der diskreten Amplitudenstufen läuft. Die Fläche einer Amplitudenstufe ergibt sich durch Multiplikation mit der Stufenbreite.

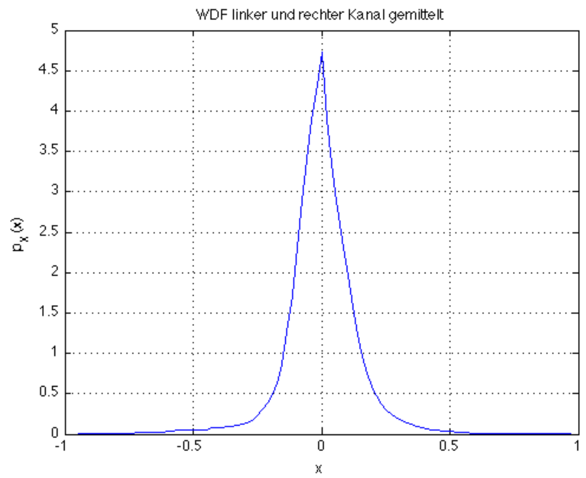
$$\sum_{i=1}^{N} p_X(x_i) \cdot \bigtriangleup x_i \stackrel{!}{=} 1$$

e) Berechnen Sie eine WDF für die Amplituden innerhalb der Audiosequenz. Teilen Sie dafür den Amplitudenbereich in 100 äquidistante Intervalle, berechnen Sie die Anzahl der Samples in diesen Intervallen und skalieren sie die Verteilungsfunktion so, dass die Normierung nach Gl. 3 erfüllt ist.
Lösung:

```
%% e)

% WDFs der Amplituden beider Audiokanaele berechnen
% normiere Flaeche der WDF auf 1
% Absolute Haufigketen durch Auszaehlung der Amplitudenanzahl in?nerhalb
% diskreter aequidistanter Intervalle ??>Histogramm
```

```
nbins=100; % Intervallanzahl
[h, intervallmitten] = hist(y,nbins);
figure
hist(y,nbins)
grid on

% ??> zeigt Anzahl der Haeufigkeiten in den 100 Intervallen
% zwischen Max und Min von y getrennt fuer linken und rechten Kanal
% Kanaele zusammenlegen
h = mean(h, 2);

% WDF durch Normierung der Flaeche des Histogramms auf 1:
% Dazu dividiere Anzahl pro bin durch Gesamtanzahl der Samples UND
% (!) Intervallbreite der Histogrammbalken
intervallbreite = ( max(max(y)) + abs(min(min(y))) ) / nbins;
wdf = h / (sum(h * intervallbreite));

% Plot
figure
plot(intervallmitten,wdf)
title('WDF linker und rechter Kanal gemittelt')
xlabel('x')
axis([-1 1 0 5])
ylabel('p_{X}(x)')
grid on
```



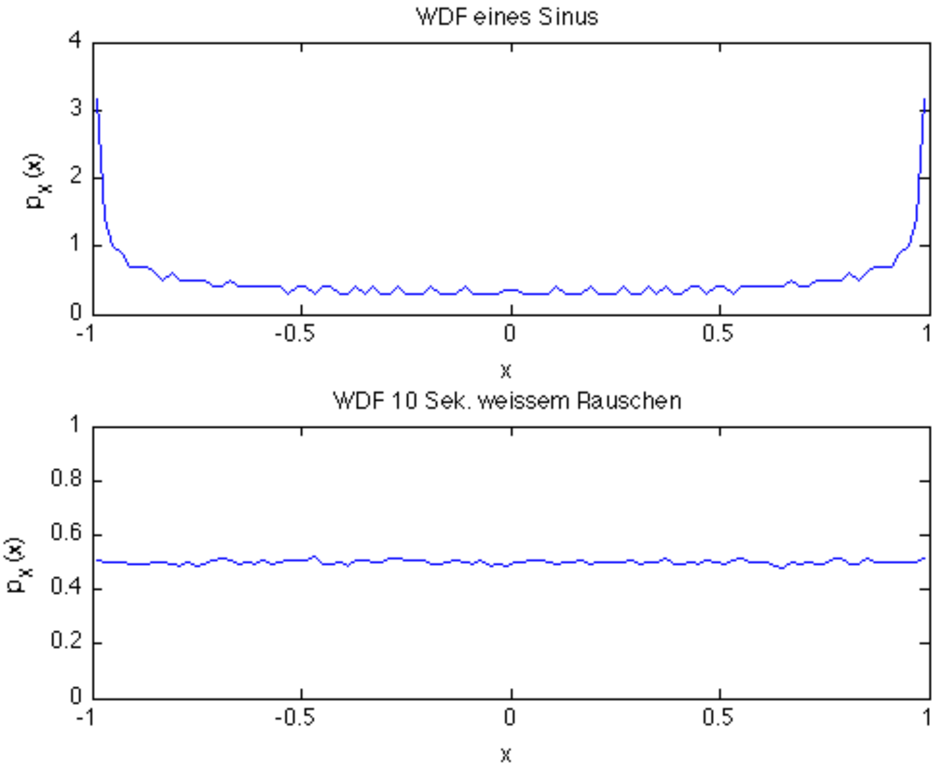


f) Plotten Sie im Vergleich dazu die WDF für die Amplituden eines vollausgesteuerten Sinussignals und einer vollausgesteuerten weißen Rauschfolge. Erzeugen sie hierfür ein 1 Sekunde langes Sinussignal mit der Frequenz f = 1 kHz und der Samplingfrequenz 44100 kHz, sowie eine weiße Rauschfolge mit identischer Dauer und Samplingfrequenz. Geben Sie zur Hörkontrolle alle Signale über die Audiokarte Ihres Rechners aus.

Lösung:

```
%% f)
%Plotte WDFs von Sinuston und weissem Rauschen (1sec)
fs = 44100;
n  = 1:fs;

% 1kHz Sinus
f_sin = 1000;
sinus = sin(n*2*pi*f_sin/fs);
```

```
%Rauschen: 1 sec bei fs=44100Hz;
noise = (rand(1,44100)-0.5)*2;

% Absolute Haeufigkeiten
[h_sin, sin_mitten] = hist(sinus,nbins);
[h_noise, noise_mitten] = hist(noise,nbins);

% Intervallbreite
intervallbreite_sinus = ( max(sinus) + abs(min(sinus)) ) / nbins;
intervallbreite_noise = ( max(noise) + abs(min(noise)) ) / nbins;

% WDF durch Normierung
wdf_sinus = h_sin / (sum(h_sin) * intervallbreite_sinus);
wdf_noise = h_noise / (sum(h_noise) * intervallbreite_noise);

%Plots
figure
subplot(2,1,1)
plot(sin_mitten,wdf_sinus),
title('WDF eines Sinus')
xlabel('x'),
axis([-1 1 0 4])
ylabel('p_{X}(x)')
subplot(2,1,2)
plot(noise_mitten,wdf_noise)
title('WDF 10 Sek. weissem Rauschen')
xlabel('x')
axis([-1 1 0 1]),ylabel('p_{X}(x)')

%% Audiowiedergabe
soundsc(noise(1:fs), fs)
%%
soundsc(sin(1:fs), fs)
```



Matlab-Funktionen: wavread, plot, hist, max, min, abs