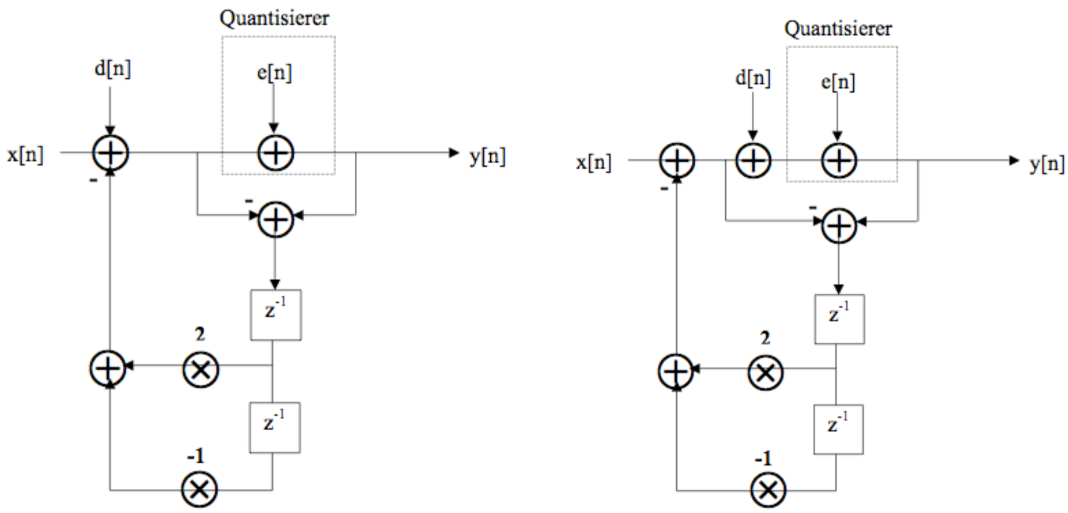
1. Aufgabe: Noiseshaping



A B

a. Stellen Sie die Differenzengleichungen für die beiden dargestellten Noiseshaping-Systeme auf und berechnen Sie jeweils die Signal- und die Rauschübertragungsfunktion im Z-Bereich.

System A:

$$y[n] = x[n] + d[n] + e[n] - 2e_0[n-1] + e_0[n-2]$$
$$e_0[n] = x[n] + d[n] + e[n] - (x[n] + d[n]) = e[n]$$

somit ist:

$$y[n] = x[n] + d[n] + e[n] - 2e[n-1] + e[n-2]$$

im z-Bereich:

$$Y(z) = X(z) + D(z) + E(z) - 2z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z) = X(z) + \underbrace{D(z) + E(z)}_{\text{Rauschen}}\underbrace{\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right]}_{\text{spektrale Formung}}$$

Rausch- und Signalübertragungsfunktion:

$$H_X(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = H_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = 1$$

$$H_E(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1})^2$$ → Noiseshaping 2. Ordnung

System B:

$$y[n] = x[n] + d[n] + e[n] - 2e_0[n-1] + e_0[n-2]$$
$$e_0[n] = x[n] + d[n] + e[n] - x[n] = d[n] + e[n]$$

somit ist:

$$y[n] = x[n] + d[n] + e[n] - 2d[n-1] + d[n-2] - 2e[n-1] + e[n-2]$$

im z-Bereich:

$$Y(z) = X(z) + D(z) + E(z) - 2z^{-1}D(z) + z^{-2}D(z) - 2z^{-1}E(z) + z^{-2}E(z)$$
$$= X(z) + D(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] + E(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] = X(z) + \underbrace{\left[D(z) + E(z)\right]}_{\text{Rauschen}}\underbrace{\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right]}_{\text{spektrale Formung}}$$

Rausch- und Signalübertragungsfunktion:

$$H_X(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1$$
$$H_E(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = H_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1})^2$$ → Noiseshaping 2. Ordnung

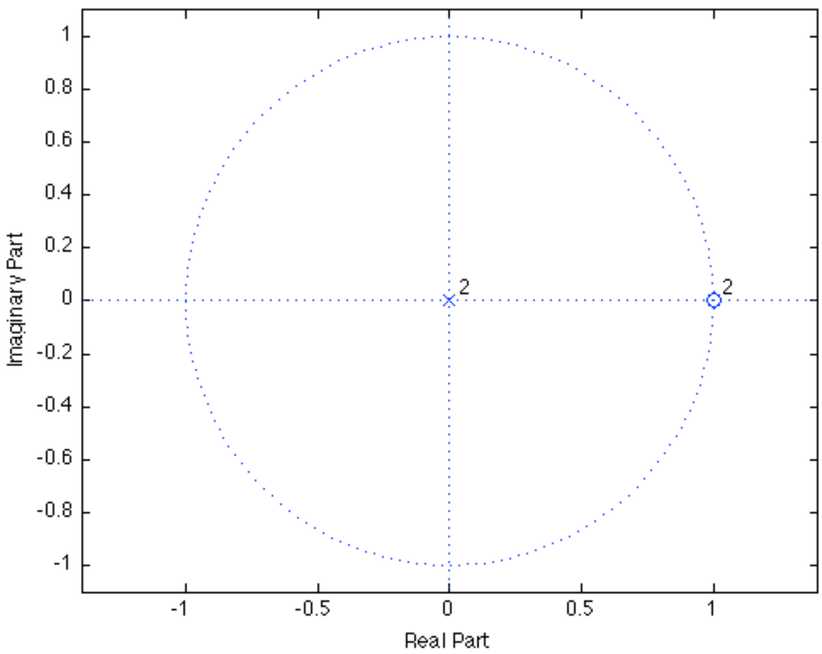
b. Berechnen Sie Null- und Polstellen der Rauschübertragungsfunktion des in b) gewählten Systems. Was für eine Übertragungsfunktion vermuten Sie anhand des Pol- Nullstellen-Diagramms?

$$H_E(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = H_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{z^0} = \frac{z^2 - 2z^1 + 1}{z^2}$$

Die Nusllstellen wegeben sich durch Lösen der Quadratischen Gleichung des Zählerpolynoms z.B. mit p,q Formel:

$$n_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1$$

Bei 1 befindet sich also eine doppelte Nulstelle. Im Ursprung liegt eine doppelte Polstelle, wie aus dem Nennerpolynom ersichtlich ist.



Aufgrund der Nullstellen bei 1, was der Frequenz f=0 Hz entspricht, wird eine Hochpass-übertragungsfunktion erwartet.

c. Stellen Sie das Betragsspektrum der Rauschübertragungsfunktionen beider Systeme in Matlab dar.

Die Fouriertransformierte ergibt sich durch Auswertung der Z-Transformierten über dem Einheitskreis, da dann die Z-Tranformation in die Fouriertransformation übergeht:

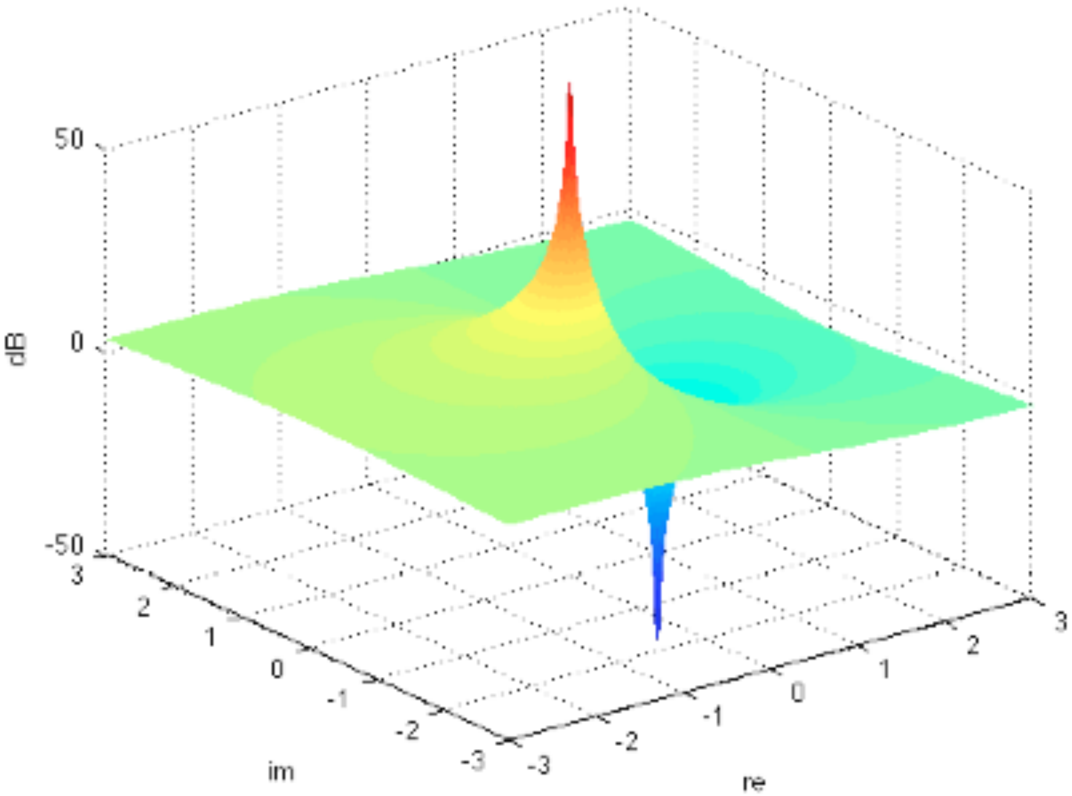
$$\underbrace{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}_{Z-Transformation} \quad mit, z = r \cdot e^{j\omega}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(r \cdot e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} \qquad für\ r = 1$$

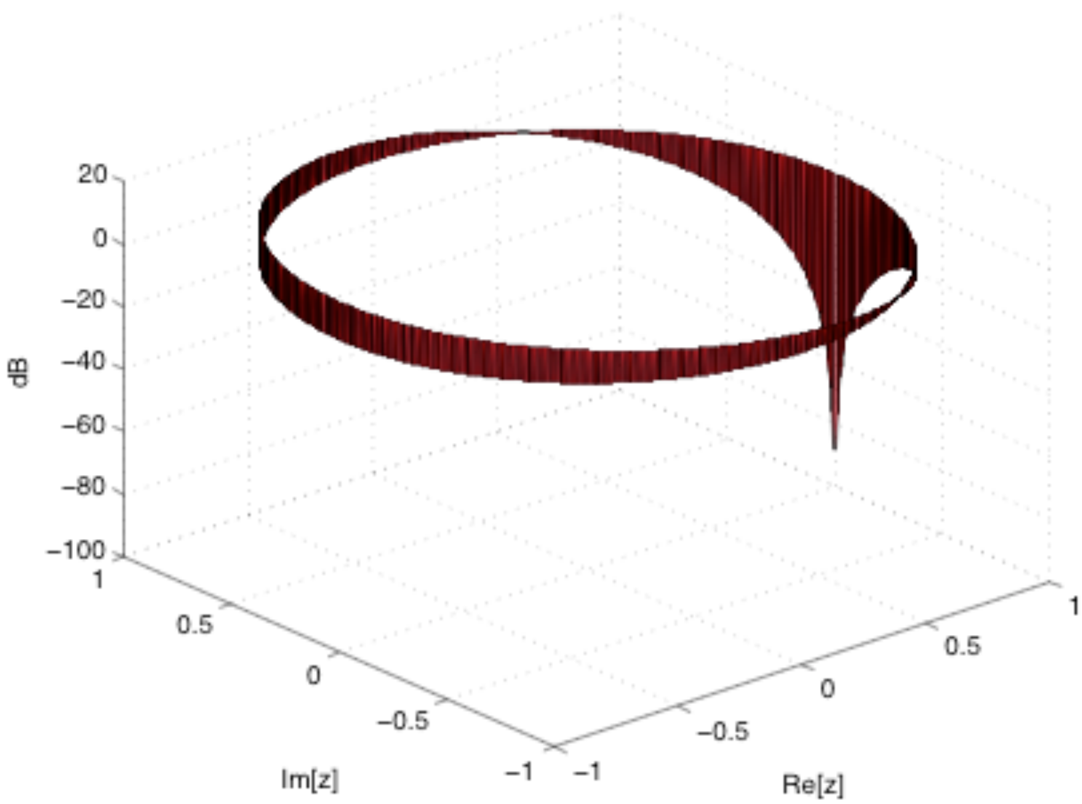
$$X(z = e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}}_{Zeitdiskrete\ FT}$$

Die Auswirkungen von Null und Polstellen auf den Einheitskreis kann durch grafische Darstellung der Z-Transformierten veranschaulicht werden:



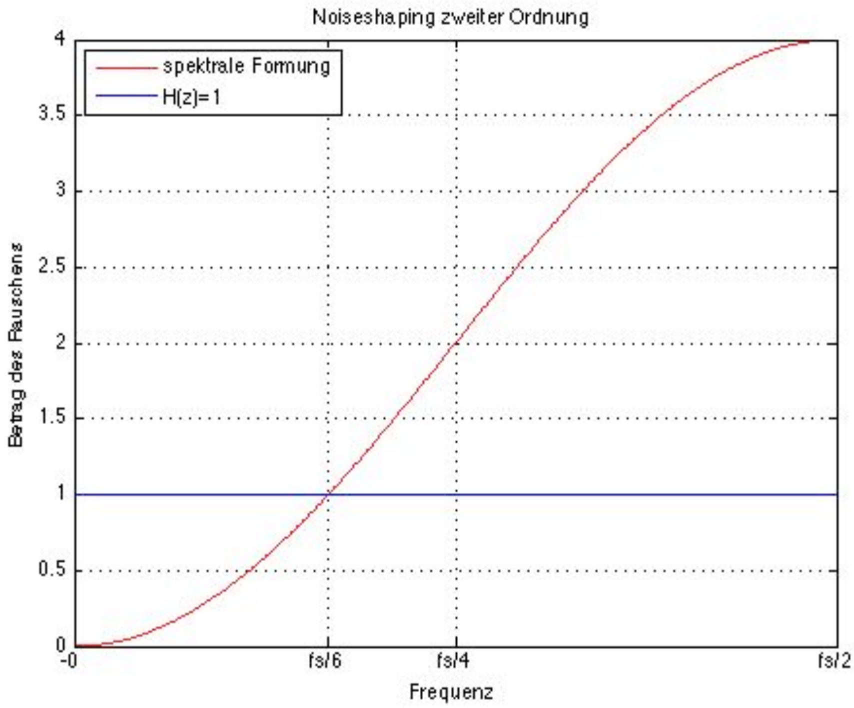

```
%% Zusatz: plot in der Z-Ebene

[re, im] = meshgrid(-3:.0125:3);
z = (re+j*im);
num = polyval([1 -2 1], z);
denum = polyval([1 0 0], z);
Z = num./denum;

% plot ueber Z-Ebene
% grid erzeugen % z-Ebend erzeugen % Zaehlerpolynom berrechnen %
Nennerpolynom brechnen % H(Z)
figure(7)
surf(re, im, 20*log10(abs(Z)), 'EdgeAlpha', 0)
xlabel('re')
ylabel('im')
zlabel('dB')
axis([-3 3 -3 3 -50 50])
```

Das Kann auch nur über dem Einheitskreis dargestellt werden:




```
%% plot ueber Einheitskreis in der Z-Ebene
N = 2^10;
[re, im] = cylinder(1, N-1);                    % Kreiskoordinaten
generieren
H = freqz([1 -2 1], [1 0 0], N/2);                            % Fre-
qenzgang bis pi
H(length(H)+1:2*length(H)) = flipud(H);       % Frequenzgang bis
2*pi durch Spiegelung
H(:, 2) = H;                                    % Fuer surf/mesh modi-
fizieren
H(:, 1) = 0;
H(:, 2) = 20*log10(abs(H(:, 2)));               % Betrag
figure(8)
hold on
surf(re, im, H', 'EdgeAlpha', 1)
xlabel Re[z]; ylabel Im[z]; zlabel dB
grid on
```

Die vermutung aus b), dass es sich bei dem System um einen Hochpass handelt wird also bestätigt. Genaue Werte lassen sich aber aus den dreidimensionalen Darstellungen schlecht bestimmen. Dafür muss der Frequenzgang zweidimensional dargestellt werden:




```
w = linspace(0, pi, 512);
H = 1-2*exp(-i*w)+exp(-2*i*w);

figure(1)
plot(w,abs(H),'r')
title('Noiseshaping zweiter Ordnung')
xlabel('Frequenz'), ylabel('Betrag des Rauschens')
xlim([0 pi])
set(gca,'XTick',[0 pi/3 0.5*pi pi])
set(gca,'XTickLabel',{'0';'fs/6';'fs/4';'fs/2'})
grid on
hold on
plot(w(1:512),ones(1,512))
legend('spektrale Formung','H(z)=1','Location','NW')
```

Das Noise-shaping verändert also die spektrale Verteilung der Rauschleistung. Ein Teil der Leistung wird zu hohen Frequenzen verschoben, bei denen das Gehör weniger empfindlich ist. Der Effekt kann durch Noise-Shaping höherer Ordnung in Kombination mit Überabtastung noch verstärkt werden.

d. Welches System ist sinnvoller? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im System A wird zwar der Quantisierungsfehler spektral geformt, nicht aber das Dithersignal. Dieses wird genau wie das Nutzsignal mit $H(z) = 1$ übertragen. Im System B hingegen wird auch das Dithersignal bei der Spektralformung berücksichtigt. Dieser Algorithmus wird also bevorzugt.

2. Aufgabe: Up-/Downsampling

Die Abtastfolge $x[n]$ wird mit dem Faktor M unter- und dem Faktor L überabgetastet.

a. Stellen Sie die beiden Blockdiagramme mit Hilfe eines analytischen Ausdrucks dar. Wie groß ist in beiden Fällen die neue Abtastrate f_S' und das Abtastintervall T_S' ?

Im Fall von Downsampling:

$$y_d[n] = x(nM)$$

$$f_S = \frac{1}{T_S} \qquad \rightarrow f_S' = \frac{f_S}{M} = \frac{1}{MT_S}$$

$$T_S' = MT_S = \frac{M}{f_S}$$

Im Fall von Upsampling:

$$y_u[n] = \begin{cases} x(\frac{n}{L}), & n = 0, \pm L, \pm 2L, ... \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

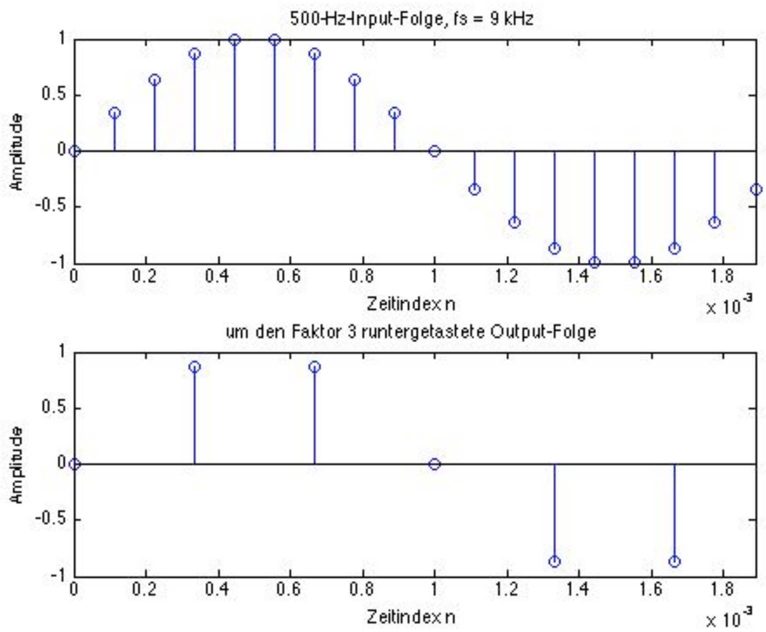
$$f_S = \frac{1}{T_S} \qquad \rightarrow f_S' = Lf_S = \frac{L}{T_S}$$

$$T_S' = \frac{T_S}{L} = \frac{1}{Lf_S}$$

b. Stellen Sie die Über- und Unterabtastung in Matlab dar für ein Signal mit der Frequenz 500 Hz, das ursprünglich mit 9 kHz abgetastet wird. Es sei M=L=3. Tipp: Füllen Sie bei der Überabtastung im Signalvektor Nullen für die neuen Abtastwerte ein.

```
% Erzeuge Sinusfolge
fs = 9000;
f = 500;
```

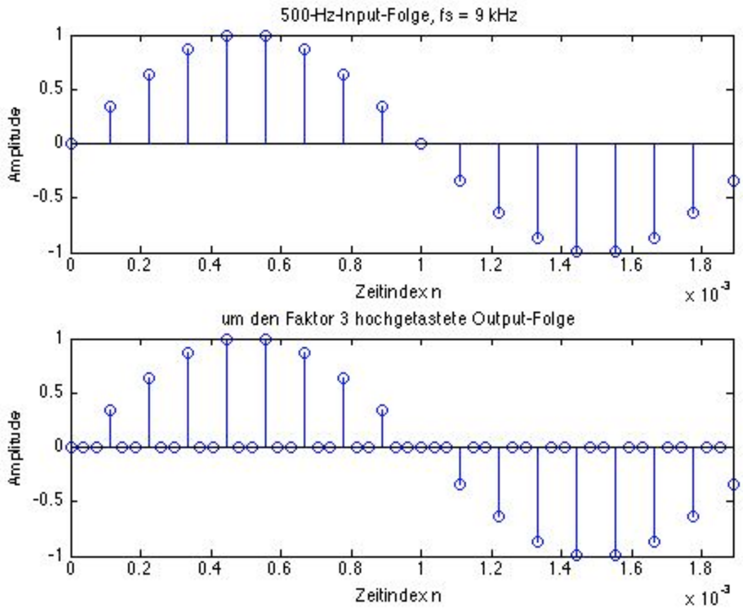
```
t = 0:1/fs:1-1/fs;
x = sin(2*pi*f*t);

% Erzeuge runtergetastete Folge mit zugehoerigem Zeitvektor t_M
M = 3;
y_down = x(1 : M : length(x));
t_M = 0:M/fs:1-M/fs;

% Plot des Input- und des Outputsignals ueber eine Periode des Signals
index_x = round(fs/f);
index_ydown = round((fs/M)/f);
figure(2)
subplot(2,1,1)
stem(t(1:index_x), x(1:index_x));
title('500-Hz-Input-Folge, fs = 9 kHz')
xlabel('Zeitindex t'), ylabel('Amplitude')
axis([0 t(index_x) -1 1])
subplot(2,1,2)
stem(t_M(1:index_ydown), y_down(1:index_ydown));
title('um den Faktor 3 runtergetastete Output-Folge')
xlabel('Zeitindex t'), ylabel('Amplitude')
axis([0 t(index_x) -1 1])
```



Nach der Unterabtastung liegt das Signal M mal weniger samples pro Periode vor. Um Aliasing zu vermeiden, muss ein Tiefpassfilter vorgeschaltet werden (siehe Aufgabe c)).

```
%%-- Upsampling --%

% Erzeuge hochgetastete Folge mit zugehoerigem Zeitvektor t_L
L = 3;
y_up = zeros(1, L*length(x));
y_up(1: L: length(y_up)) = x;
t_L = 0:1/(fs*L):1-1/(fs*L);

% Plot des Input- und des Outputsignals ueber eine Periode des Signals
index_yup = round((fs*L)/f);
figure(3)
```

```
subplot(2,1,1)
stem(t(1:index_x), x(1:index_x));
title('500-Hz-Input-Folge, fs = 9 kHz')
xlabel('Zeitindex t'), ylabel('Amplitude')
axis([0 t(index_x) -1 1])
subplot(2,1,2)
stem(t_L(1:index_yup), y_up(1:index_yup));
title(['um den Faktor 3 hochgetastete Output-Folge'])
xlabel('Zeitindex t'), ylabel('Amplitude')
axis([0 t(index_x) -1 1])
```



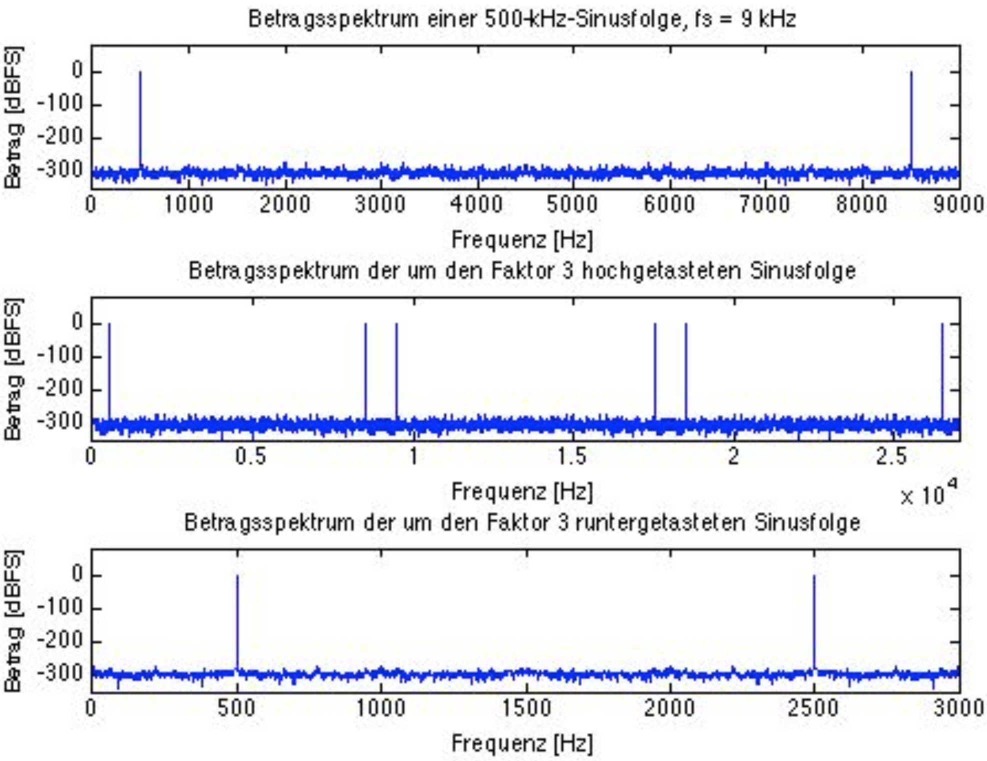
Nach der Überabtastung liegt das Signal L mal mehr samples pro Periode vor. Die zusätzlichen samples werden vorerst mit Nullen aufgefüllt, sie müssen jedoch anschließend durch Tiefpassfilterung zu Abtastwerten interpoliert werden (siehe Aufgabe c)).

c. Stellen Sie das ursprüngliche und die beiden neu abgetasteten Signale im Frequenzbereich dar (in Matlab oder als Skizze). Erklären Sie anhand des Ergebnisses, welche Filter zusätzlich nötig sind.

```
% normierte FFT der Signale
X = abs(fft(x))/max(abs(fft(x)));
Y_down = abs(fft(y_down))/max(abs(fft(y_down)));
Y_up = abs(fft(y_up))/max(abs(fft(y_up)));

% Plots der FFTs
N = length(X);
N_M = length(Y_down);
N_L = length(Y_up);
f_indexx = 0:fs/N:fs-fs/N;
f_indexydown = 0:(fs/M)/N_M:(fs/M)-(fs/M)/N_M;
f_indexyup = 0:(fs*L)/N_L:(fs*L)-(fs*L)/N_L;

figure(4)
subplot (3,1,1), plot(f_indexx,20*log10(X))
xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
title('Betragsspektrum einer 500-kHz-Sinusfolge, fs = 9 kHz')
```

```
axis([0 fs -350 80])
subplot (3,1,2), plot(f_indexyup,20*log10(Y_up))
xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
title('Betragsspektrum der um den Faktor 3 hochgetasteten Sinusfolge')
axis([0 fs*L -350 80])
subplot (3,1,3), plot(f_indexydown,20*log10(Y_down))
xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
title('Betragsspektrum der um den Faktor 3 runtergetasteten Sinusfolge')
axis([0 fs/M -350 80])
```

Upsampling:
Durch die erste Abtastung des Signals mit 9 kHz tritt eine Spiegelfrequenz bei f_S - f auf, also bei 8,5 kHz. Wird dieses Signal nun überabgetastet, so ergeben zusätzliche Spiegelfrequenzen um jedes Vielfache der alten Abtastfrequenz.
Eine anschließende Tiefpassfilterung bei der halben alten Abtastfrequenz bewirkt im Frequenzbereich die Unterdrückung der entstandenen Spiegelfrequenzen zwischen $f_{S\_alt}/2$ und f_{S_neu} - $f_{S\_alt}/2$. Im Zeitbereich erfolgt die Interpolation zwischen den durch die eingefügten Nullen „getrennten" samples. Das Tiefpassfilter wird deshalb Interpolations- oder Anti-Imaging-Filter genannt. Der Vorgang der Überabtastung mit anschließender Tiefpassfilterung wird Interpolation genannt.
Das bei der Rückwandlung in ein analoges Signal notwendige Rekonstruktionsfilter (siehe Aufgabenblatt 2) unterdrückt auch noch die Signalanteile zwischen $f_{S\_alt}/2$ und f_{S_neu}, es muss jedoch dank der Überabtastung nicht besonders steilflankig sein.



Downsampling:
Beim Downsampling wird die Abtastrate und somit auch die Spiegelfrequenzen bei
f_S - f in tiefere Frequenzbereiche verschoben. Um zu vermeiden, dass durch diese Aliasing auftritt, dass also $f_{S\_neu} - f < f$ bzw. $f_{S\_neu} < 2f$, muss das Signal *vor* dem Downsampling mit

einem Anti-Aliasing- oder Dezimationsfilter bandbegrenzt werden. Der Vorgang der Unterabtastung mit vorhergehender Tiefpassfilterung wird Dezimation genannt.

d. Nennen Sie die zwei Hauptgründe für Überabtastung.

Der erste Grund für Überabtastung liegt im Aufwand für den Entwurf des analogen Antialiasing-Filters. Dieses müsste im Normalfall sehr steilflankig sein, damit die gesamte Bandbreite des Nutzsignals bis zur Nyquistfrequenz genutzt werden kann. Wird die Abtastrate aber höher gesetzt, so verschiebt sich auch die Nyquistfrequenz zu einer höheren Frequenz, das Nutzband bleibt jedoch gleich. Es ist also ein flacheres Filter ausreichend, um trotzdem die gesamte Bandbreite des Nutzsignals zu übertragen. Ebenso kann das Rekonstruktionsfilter deutlich flacher ausfallen (siehe Aufgabe c)).
Der zweite Grund bezieht sich auf den Quantisierungsfehler. Dessen Rauschleistung ist – bei guter Aussteuerung und ausreichender Wortbreite – über das gesamte Spektrum gleichverteilt, gleichzeitig ist sie jedoch nicht abhängig von der Abtastfrequenz. Steigt also die Bandbreite des Übertragungssignals mit der Abtastrate, so verteilt sich die Rauschleistung über einen größeren Frequenzbereich. Nach erneuter (digitaler) Tiefpassfilterung resultiert ein größerer SNR, der mit ca. 3 dB pro Frequenzverdoppelung steigt.