

## 1. Aufgabe: Dither

- a. Erweitern Sie die Funktion `xquant` vom 2. Aufgabenblatt (28.10.2010) so, dass die Möglichkeit besteht, einen gleich- oder dreiecksverteilten Dither zum Eingangssignal zu addieren. Dieser soll die Amplitude  $-0,5$  LSB bis  $0,5$  LSB für den gleich- und  $-1$  LSB bis  $1$  LSB für den dreiecksverteilten Fall haben.

Die Funktion `xquant` befindet sich im Anhang.

- b. Stellen Sie das Ergebnis der Quantisierung für ein Sinussignal im Zeit- und Frequenzbereich dar und geben Sie es über ihre Soundkarte wieder.

```
%% 1b)
close all; clear; clc

% Signal erzeugen
fs = 44100;
f1 = 500;
t = 0:1/fs:1-1/fs;
y = sin(2*pi*f1*t);

% Quantisieren mit Ditherung
[yQtreadR, yEtreadR, codebook, yDtreadR] = xquant(y, 3, 'mid-
tread', 'rect');
[yQtreadT, yEtreadT, codebook, yDtreadT] = xquant(y, 3, 'mid-
tread', 'tri');

% Plot im Zeitbereich ueber 1 Periodenlaengen
index = ceil(fs/f1);

%% Plot im Zeitbereich
figure(5) % figure(3)
subplot(2,1,1)
    plot(t(1:index), yDtreadR(1:index), t(1:index),
yQtreadR(1:index), t(1:index), yEtreadR(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie und rect-dither')
    grid on
subplot(2,1,2)
    plot(t(1:index), yDtreadT(1:index), t(1:index),
yQtreadT(1:index), t(1:index), yEtreadT(1:index))
    title('Quantisiert mit mid-tread Kennlinie und tri-dither')
    grid on

%% Spektren berechnen
Y = fft(y)/max(fft(y));
```

```

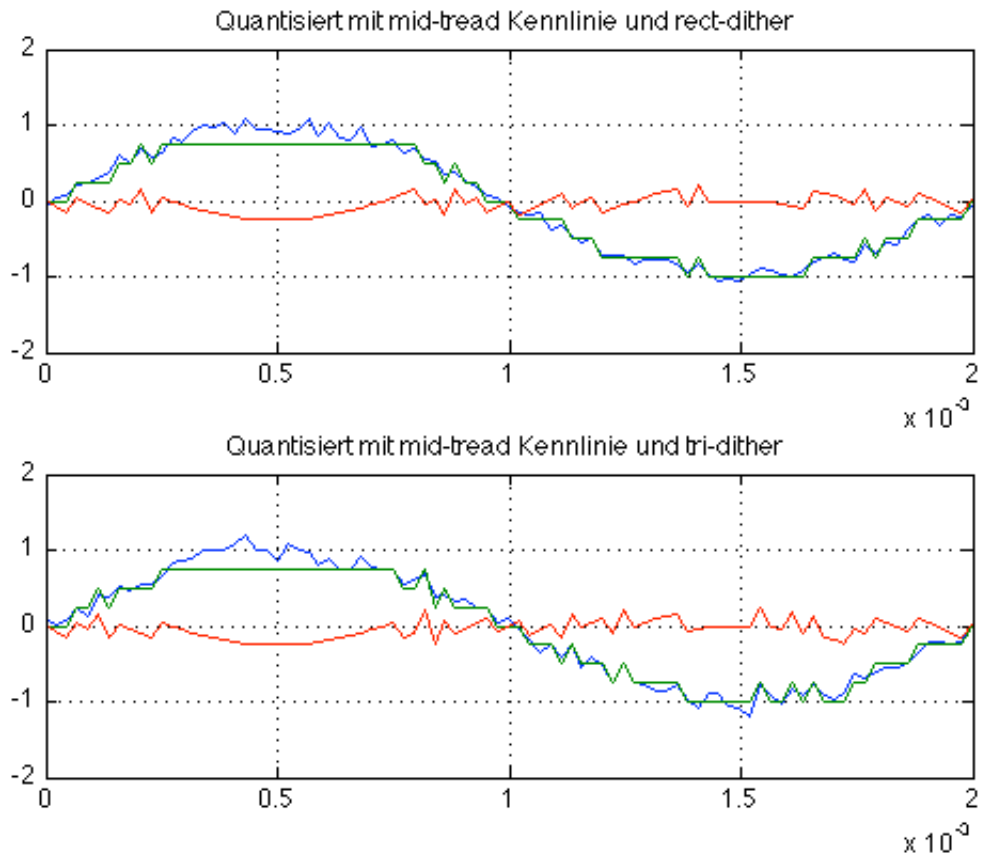
YQtreadR = fft(yQtreadR)/max(fft(yQtreadR));
YQtreadT = fft(yQtreadT)/max(fft(yQtreadT));
N = length(y);
f_index = 0:fs/N:fs-fs/N;    % Frequenzindex bis fs

% Spektren plotten
figure(6) % figure(2)
subplot(3,1,1)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(Y)))
    axis([20 fs/2 -350 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum eines Sinussignals 500 Hz')
subplot(3,1,2)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(YQtreadR)))
    axis([20 fs/2 -100 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum nach mid-tread Quantisierung und rect-dither')
subplot(3,1,3)
    semilogx(f_index, 20*log10(abs(YQtreadT)))
    axis([20 fs/2 -100 10])
    xlabel('Frequenz [Hz]'), ylabel('Betrag [dBFS]')
    title('Spektrum nach mid-tread Quantisierung und tri-dither')

%% Histogramme plotten

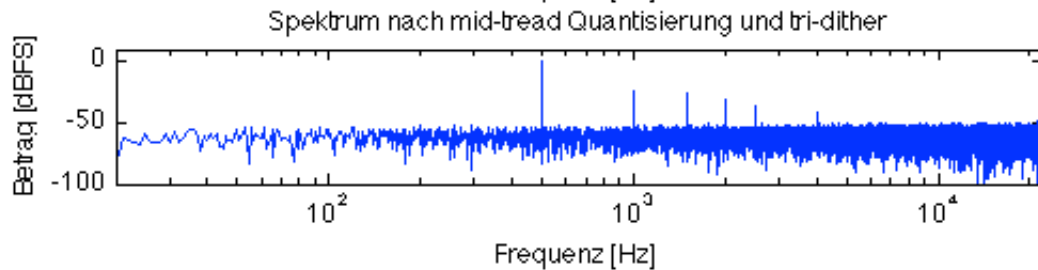
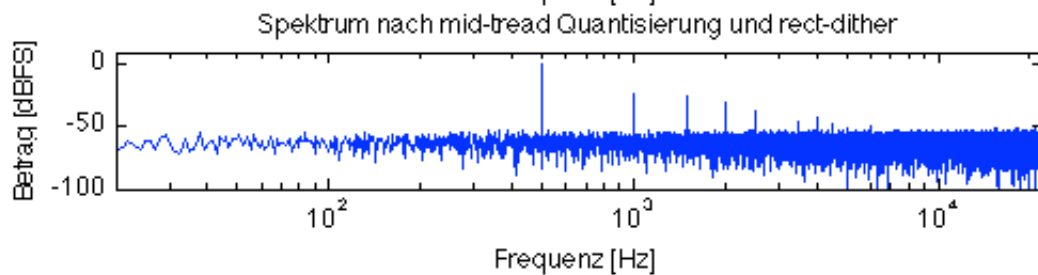
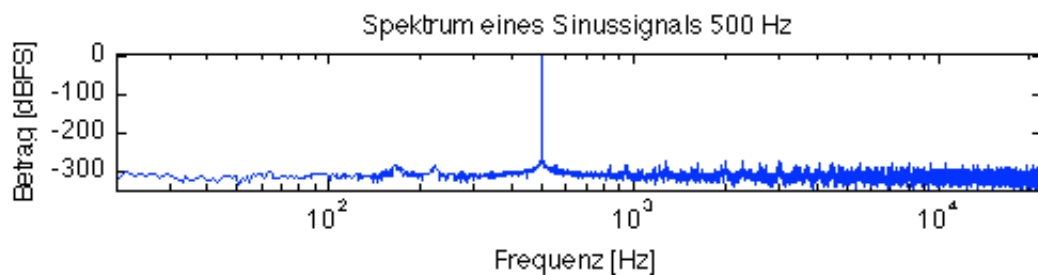
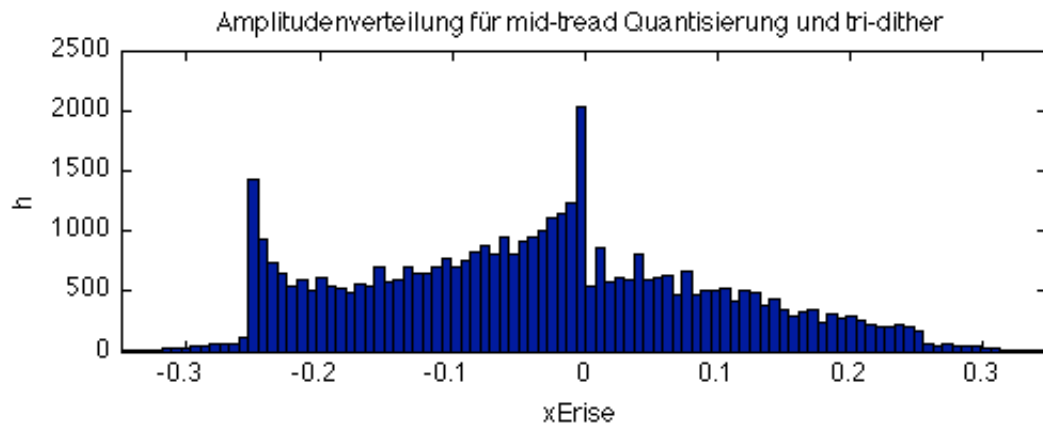
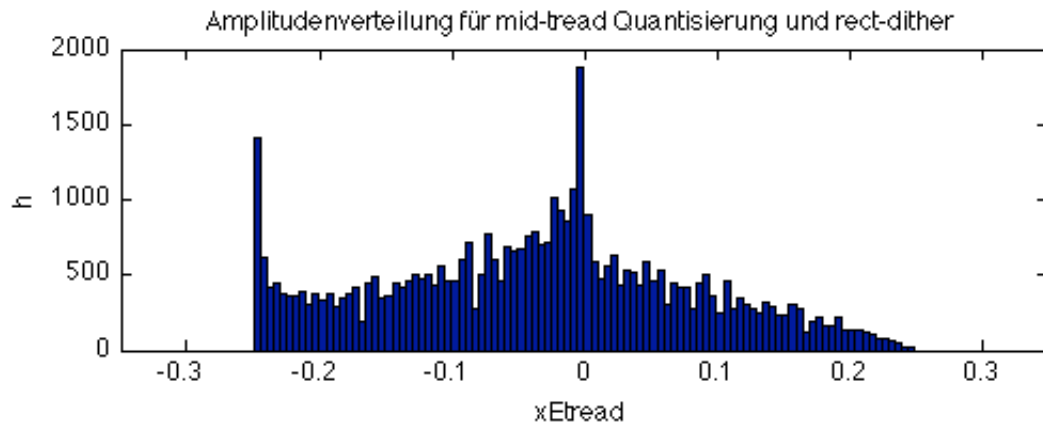
figure(7) % figure(4)
subplot(2,1,1)
    hist(yEtreadR, 100)
    xlim([-0.35 0.35])
    title('Amplitudenverteilung für mid-tread Quantisierung und
rect-dither')
    xlabel('xEtread')
    ylabel('h')
subplot(2,1,2)
    hist(yEtreadT, 100)
    xlim([-0.35 0.35])
    title('Amplitudenverteilung für mid-tread Quantisierung und
tri-dither')
    xlabel('xErise')
    ylabel('h')

```



Durch die Ditherung wird der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal aufgehoben. Der Quantisierungsfehler nähert sich dadurch einem Zufallssignal an. Das lassen auch die Histogramme vermuten, die einer Dreiecksverteilung ähneln. Der tri-Dither sorgt dafür, dass es auch an den Rändern eines Quantisierungsintervalles Amplitudenübergänge gibt, was beim Minimum der Sinusschwingung zu sehen ist.

Matlab-Funktionen: function, switch, quantiz, hist, fft, soundsc

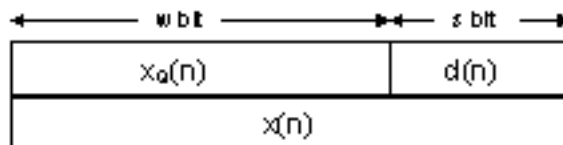


Im Spektrum sind für beide Dithertechniken zwar noch Verzerrungen zu erkennen, diese sind aber nicht mehr hörbar und verschwinden im Rauschteppich, mit dem die Dekorellation von Eingang und Fehlersignal bezahlt werden muss.

Matlab-Funktionen: function, switch, quantiz, hist, fft, soundsc

## 2. Aufgabe: Erwartungswert nach Requantisierung

Ein 12-bit-Signal  $x(n)$  wird mit  $w = 6$  bit requantisiert. Vor der Requantisierung wird ihm ein gleichverteiltes Dithersignal mit der Amplitude  $-0,5$  LSB bis  $0,5$  LSB beigemischt. Das Dithersignal wird mit  $s = 6$  bit quantisiert.



- Stellen Sie mit Hilfe von Matlab den Erwartungswert des requantisierten Ausgangssignals über der Eingangsamplitude innerhalb eines Quantisierungsintervalls dar. Die Berechnungsvorschrift des Erwartungswerts findet sich im Abschnitt „Dither-Techniken“ bei Zölzer (2005).<sup>1</sup>

Der Erwartungswert eines requantisierten Signals lässt sich wie folgt berechnen:

$$\bar{g}(V) = \sum_k g(V + d_k) P(d_k), \quad \text{mit } -2^{s-1} \leq k \leq 2^{s-1} - 1$$

$$\text{wobei } g(V + d_k) = Q \left\lfloor \frac{V + d_k}{Q} + 0,5 \right\rfloor.$$

Die untere Gleichung stellt dabei die Quantisierung mit dem Rundungsfaktor  $0,5$  dar, es wird also zu der Eingangsamplitude  $V$  eine der  $2^s$  Ditheramplituden  $d_k$  addiert und das Ergebnis quantisiert. Der Erwartungswert einer bestimmten Eingangsamplitude  $V$  ist die Summe dieser  $k$  Quantisierungen gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit der Ditheramplituden. Wird dies für jede Eingangsamplitude  $V$  berechnet, ergibt sich die gesuchte Requantisierungskennlinie.

```
clear all
clc

n = 12;           % Wortbreite der ersten Quantisierung
s = 6;           % Wortbreite der Ditherquantisierung

V = 0:2^-n:1;    % Eingangsvektor
amp_dither = 0.5; % Ditheramplitude

q_s = 2*amp_dither/2^s; % Quantisierungsintervall des Dithers
```

<sup>1</sup> Zölzer U (2005) Digitale Audiosignalverarbeitung. 3. Auflage, Teubner, Stuttgart. Dieses Buch finden Sie im Downloadbereich auf der Webseite zu dieser Lehrveranstaltung.

```

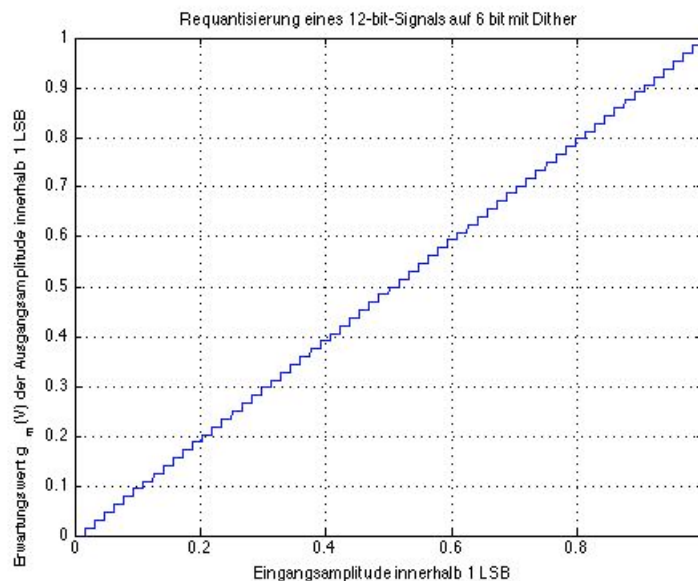
d_k = -amp_dither:q_s:amp_dither-q_s; % Dithersignal
P_d = 1/2^s;% Wahrscheinlichkeit der Ditheramplituden

% Zu jedem Amplitudenwert von V innerhalb eines LSB werden alle
% möglichen
% Amplitudenwerte des Dithers addiert, einzeln quantisiert und der
% Erwartungswert berechnet. Es resultiert ein Vektor mit den
% Erwartungswerten für alle Eingangsamplituden von V.

for i = 1:length(V);
    g_m(i) = sum(round((V(i)+d_k))*P_d);
end

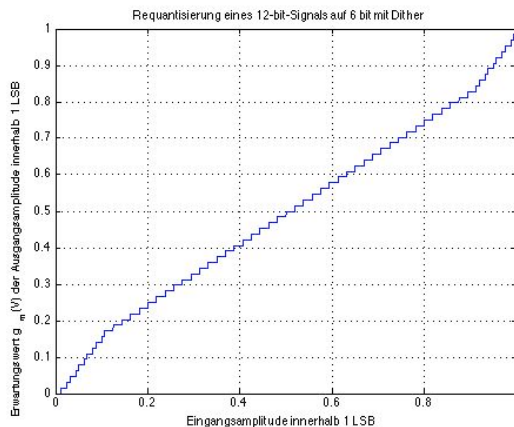
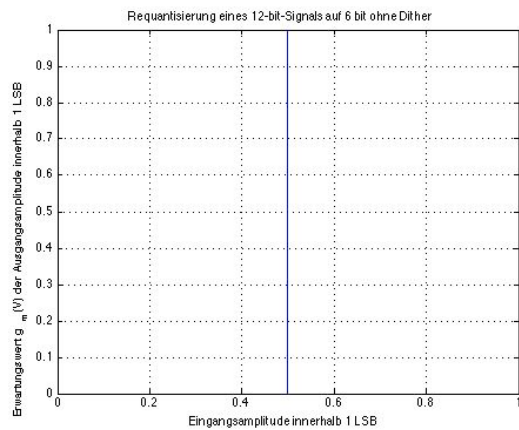
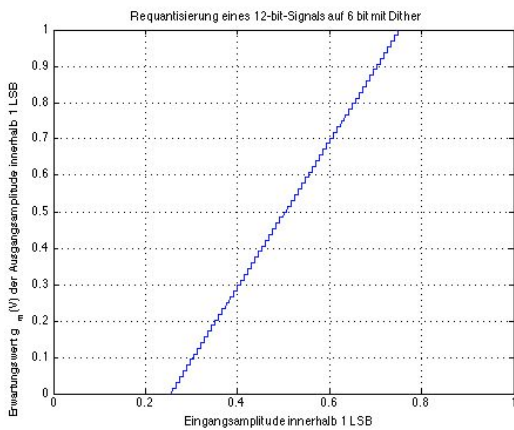
figure(8)
plot(V,g_m)
axis ([0 1 0 1])
title('Requantisierung eines 12-bit-Signals auf 6 bit mit Dither')
xlabel('Eingangsamplitude innerhalb 1 LSB')
ylabel('Erwartungswert g_m(V) der Ausgangsamplitude innerhalb 1 LSB')
grid on

```



Es ergibt sich durch die Addition des Dithers eine linear ansteigende Kennlinie. Die mittleren Ausgangswerte einer mit Dither durchgeführten Requantisierung entsprechen den Eingangswerten, obwohl diese unterhalb eines LSB liegen. Durch das Dithering kann also eine höhere Auflösung erzielt werden, als von der Requantisierung vorgegeben. Sie entspricht  $w \text{ bit} + s \text{ bit}$ .

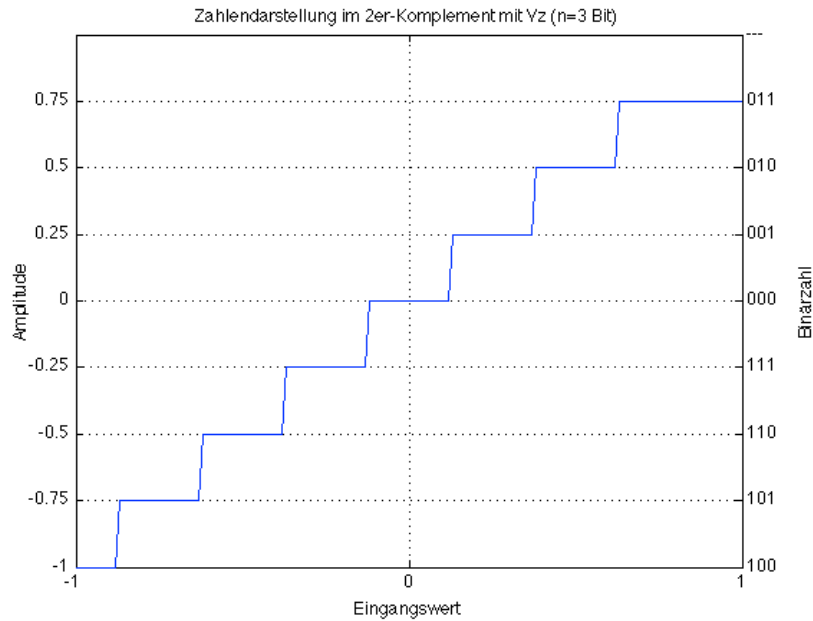
- b. Wiederholen Sie dies für die Dither-Aussteuerungen  $[-0,25 \ 0,25]$  LSB und  $[-0,6 \ 0,6]$  LSB sowie für eine Requantisierung ohne Dither und interpretieren die Ergebnisse



Bei geringer ausgesteuertem Dithersignal nähert sich die Kennlinie immer mehr einer einzigen Treppenstufe, wie sie sich bei einer Requantisierung ohne Dither ergibt. Da die Ditheramplitude zu gering ist, „landen“ weniger Werte über einem halben LSB, sodass der mittlere Ausgangswert länger auf der Stufe 0 bleibt. Bei einer Quantisierung ohne Dither wird die Hälfte der Eingangswerte auf 0 LSB, die andere Hälfte auf 1 LSB quantisiert. Wird das Dithersignal höher ausgesteuert als  $\pm 0,5\text{LSB}$ , wird die Kennlinie bis zu einem bestimmten Punkt steiler ansteigen, da im Mittel zu viele Werte auf 1 LSB quantisiert werden.

### 3. Aufgabe: Zahlenformate

- a. Skizzieren Sie eine 3 bit Mid-Tread Quantisierungskennlinie für einen Ein- und Ausgangswertebereich von -1 bis 1. Beschriften sie die Ausgangswerte mit den Amplituden, sowie den entsprechenden Binärzahlen im 2er-Komplementär mit Vorzeichen.



Der Zusammenhang von Zahlenwerten zur Binärsarstellung ist

$$x_Q = -b_0 + \sum_{i=1}^{w-1} b_{-i} 2^{-i} \quad \text{mit,} \quad -1 \leq x_Q \leq 1 - 2^{-(w-1)}$$

wobei  $w$  die Wortbreite und  $i$ , das  $i$ -te bit ist.

- b. Erläutern sie die Unterschiede zwischen Fest- und Gleitkommadarstellung, sowie deren Vor- und Nachteile.

Durch die Gleitkommadarstellung wird eine Variable Stufengröße für die Quantisierung erreicht, die kleine Eingangswerte mit einem geringeren Quantisierungsfehler abtastet, als Große. Dies führt für kleine Eingangswerte im Vergleich zur Festkommadarstellung mit fester Stufengröße zu einem besseren SNR. Sie findet in vielen Audio-Workstations aufgrund leistungsfähiger Gleitkommaeinheiten moderner Prozessoren Anwendung. Die Festkommadarstellung wird aus Kostengründen in vielen DSP-Chips, wie sie z.B. in MP3 Playern verbaut sind verwendet. Zudem hat sie eine geringere Leistungsaufnahme.



## 4. Anhang

```
% [xQ, xE, codebook, xD] = xquant(x, nbits, method, dither,
doPlot)
%
% quantizes a single row or column vektor
%
%
% input arguments
%
% x      : input signal
% nbits  : depth
% method : 'mid-tread' or 'midrise'.
% dither : 'rect' (rectangular, .0 lsb peak amplitude)
%        : 'tri' (triangular, 1 lsb peak amplitude)
%        : 'none'
% doPlot : 0 = no plot
%        : 1 = plot time signals
%        : 2 = plot frequency Response of quantized signal and
histogramm
%                of quantzation error
%
%
% output arguments:
%
% xQ      : quantised signal
% xE      : quantisation error (xQ-x)
% codebook : values used for quantisation
% xD      : dithered signal
%
%
%
% author: fabian brinkmann

function [xQ, xE, codebook, xD] = xquant(x, nbits, method, dither,
doPlot)

% check optional input argument
if nargin == 3
    dither = 'none';
    doPlot = 0;
end

if nargin == 4
    doPlot = 0;
end

% check right input format
if size(x, 1) > size(x, 2)
    x = x';
end
```

```

% least significant bit
lsb = 2^-(nbits-1);

% ----- calculate dither ----- %
switch dither

    % rectangular pdf dither with .5 lsb amplitude
    case 'rect'
        d = lsb*rand(size(x))-lsb/2;
        xD = x+d;

    % triangular pdf dither with 1 lsb amplitude
    case 'tri'
        d = lsb*rand(size(x))-lsb/2;
        d2 = lsb*rand(size(x))-lsb/2;
        d = d+d2;
        xD = x+d;
    otherwise
        xD = x;
end

% ----- quantize signal ----- %
switch method

    % mid-tread quantisation, with a value for zero but one quan-
    % value less for values >0
    % tisation
    case 'mid-tread'
        % partition defines borders used for quantisation
        partition = -1+.5*lsb:lsb:1-1.5*lsb;
        % codebook defines values used for quantisation
        codebook = -1:lsb:1-lsb;

    % mid-rise quantisation. No value for zero but even spacing of
    % values
    % around zero
    case 'mid-rise'
        partition = -1+lsb:lsb:1-lsb;
        codebook = -1+.5*lsb:lsb:1-.5*lsb;
end

% quantize the signal using 'quantiz'
[index, xQ] = quantiz(xD,partition,codebook);

% calculate quantisation error
xE = xQ - x;

% ----- plot signal ----- %

% plots time signals or frequency response and histogram of quan-
% tization error

```

```

if doPlot == 1
    figure
        n=0:length(x)-1;
        plot(n, xQ, n, x, n, xE, n, xD)
        legend('Quantized x', 'x', 'Quantization error', 'Dithered
x', ...
                'Location', 'SouthOutside')
        title('Time signals')
        %axis([0 length(x)-1 -1 1])
elseif doPlot == 2
    figure
        subplot(2,1,1)
            XQ = 20*log10(abs(fft(xQ)));
            semilogx(XQ(1:length(XQ)/2))
            xlim([0 length(XQ)/2])
            grid on
            set(gca, 'XTick', 0:length(XQ)/4:length(XQ)/2)
            set(gca, 'XTickLabel', {'0', 'pi/2', 'pi'})
            title('Frequency response of quantized signal')
        subplot(2,1,2)
            hist(xE, 100)
            title('Histogram of quantization error')
            axis 'tight'
            xlim([-2*lsb 2*lsb])
end

```