1. Aufgabe: Amplitudenstatistik analoger Audiosignale

a. Ein Signal x(t) hat die durch Abb. 1 gegebene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF bzw. PDF), die durch die Punkte $P_1(-1|0)$, $P_2(0|a)$ und $P_3(1|0)$ verläuft. Wählen Sie a so, dass die durch Gl. 1 gegebene Voraussetzung erfüllt ist. Veranschaulichen Sie sich diese Voraussetzung.

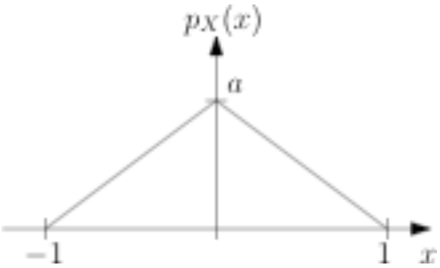


Abb. 1: WDF eines Audiosignals

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = 1 \qquad Gl.1$$

Gl. 1 Integriert die Auftretenswahrscheinlichkeiten aller im Signal enthaltenen Amplituden. Ist diese 1, bedeutet das lediglich, dass zu jedem Zeitpunkt t eine Amplitude auftritt.

Zunächst wird die WDF durch zwei Geradengleichung beschrieben

$$p_X(x) = \begin{cases} ax + a & \text{,für } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -ax + a & \text{,für } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Dann kann a berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) &\stackrel{!}{=} 1 \\ \int_{-1}^{0} ax + a\;dx + \int_{0}^{1} -ax + a\;dx &= 1 \\ a\left(\int_{-1}^{0} x + 1\;dx + \int_{0}^{1} -x + 1\;dx\right) &= 1 \\ a\left(\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1}\right) &= 1 \\ a\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0\right) &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

a. Berechnen Sie das lineare und quadratische Mittel von x(t), sowie dessen Varianz.

Der lineare Mittelwert (auch Erwartungswert 1. Ordnung oder 1. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx = \mu_x \\
&= \int_{-1}^{0} x(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 + x\, dx + \int_{0}^{1} -x^2 + x\, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\
&= 0 - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{2} - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die quadratische Mittelwert (auch Erwartungswert 2. Ordnung oder 2. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
E\{X^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(-x+1)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^3 + x^2\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x^2\, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} \\
&= 0 - \left(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{3} - 0 \\
&= \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Es zeigt sich schnell, dass die Varianz in diesem Fall gleich dem quadratischen Mittelwert ist:

$$
\begin{aligned}
E\{|X - \mu_X|^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_X|^2 \cdot p_X(x)\, dx = \sigma^2 \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot p_x(x)\, dx = E\{X^2\}
\end{aligned}
$$

Es kann aber auch allgemein gezeigt werden, dass zunächst linearer und quadratischer Mittelwert berechnet werden können, um anschließend die Varianz zu berechnen (Verschiebungssatz).

$$
E\{|X - \mu_x|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu_X|^2 p_X(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx}_{E\{X^2\}} - 2\mu_X \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx}_{=\mu_X} + \mu_X^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx}_{=1}
$$

$$
= E\left\{X^2\right\} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E\left\{X^2\right\} - \mu_X^2
$$

b. Zeigen Sie, dass Signale mit einer um 0 gerade symmetrischen WDF immer Mittelwertfrei sind.

Ist ein Signal mittelwertfrei, hat es einen Mittelwert von $\mu = 0$. Der Mittelwert ist gegeben durch:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx$$

Abb. 2 veranschaulicht dies. Die gerade symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird durch die Multiplikation mit der ungerade symmetrischen Funktion y=x ebenfalls ungerade symmetrisch. Dadurch heben sich die Flächenanteile links und rechts der y-Achse gegenseitig auf. Der Mittelwert muss also für diesen Fall immer 0 sein.

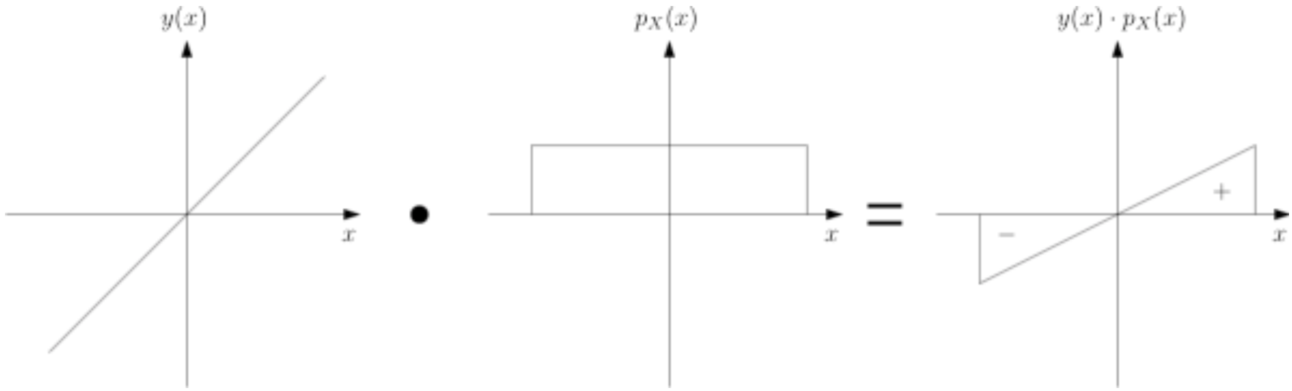


Abb. 2: Graphische Darstellung des Integrals zur Mittelwertbildung

2. Aufgabe: Autokorrelation, Leistung und WDF eines Sinussignals

Bei periodischen Signalen wird zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion nur über eine Periode integriert, sodass:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t-\tau)\} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$$

a. Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Gleichung die AKF eines Sinussignals $x(t)$ = A·sin(ωt) und erläutern Sie anhand des Ergebnisses die Eigenschaften der AKF.
(Hilfe: sinα·sinβ = ½·[cos(α - β) – cos(α + β)])

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \cdot x(t-\tau) \cdot dt$$

Im vorliegenden Fall:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T A \cdot \sin(\omega t) \cdot A \cdot \sin(\omega(t-\tau)) \cdot dt$$

mit $\quad \sin\alpha \cdot \sin\beta = ½ \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$)

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\omega t - (\omega(t-\tau)) - \cos(\omega t + \omega(t-\tau))\right] \cdot dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(\omega\tau) \cdot dt - \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t - \omega\tau) \cdot dt}_{=0}$$

$$= \frac{A^2}{2T}\cos(\omega\tau)t\Big|_0^T = \frac{TA^2}{2T}\cos(\omega\tau) = \underline{\underline{\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)}}$$

Die Autokorrelationsfunktion eines Sinussignals ist ein Cosinussignal. Dies stimmt mit der Symmetrieeigenschaft der AKF überein sowie mit der Tatsache, dass zu einer periodischen Zeitfunktion eine ebenfalls periodische AKF gehört. Ersichtlich wird zudem, dass die AKF an der Stelle 0 maximal ist, wobei sich die Maxima mit jeder Periode wiederholen. Bei keiner Verschiebung ($\tau = 0$) ist die Funktion sich selbst am ähnlichsten, durch ihre Periodizität stimmt sie zusätzlich am Anfang jeder Periode wieder mit sich selbst überein.

b. Berechnen Sie die Leistung des Signals mit Hilfe der AKF und auf anderem Weg. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Die Leistung eines Signals ergibt sich durch die Berechnung von

$\varphi_{xx}(\tau)$ an der Stelle $\tau = 0$. Dies ergibt erwartungsgemäß für die berechnete AKF:

$$\varphi_{xx}(0) = \frac{A^2}{2}$$

Die Leistung kann im Zeitbereich auch ohne den Umweg der Autokorrelation berechnet werden, indem der quadrierte Sinus über eine Periodendauer integriert wird:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2(t)dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin(t) \cdot \sin(t)dt$$

Das Integral kann durch partielle Integration ($\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$) gelöst werden:

$$\frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin^2(t)dt = \frac{A^2}{T}\left[\left|-\sin(t)\cos(t)\right|_0^T - \int_0^T -\cos(t)\cos(t)dt\right]$$

$$\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(t)dt = \frac{A^2}{T}\left[\underbrace{\left|-\sin(t)\cos(t)\right|_0^T}_{=0} + \int_0^T \cos^2(t)dt\right]$$

Mit Hilfe des Additionstheorems ($\cos^2 + \sin^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 = 1 - \sin^2$) folgt:

$$\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(t)dt = \frac{A^2}{T}\left[\int_0^T 1\,dt - \int_0^T \sin^2(t)dt\right]$$

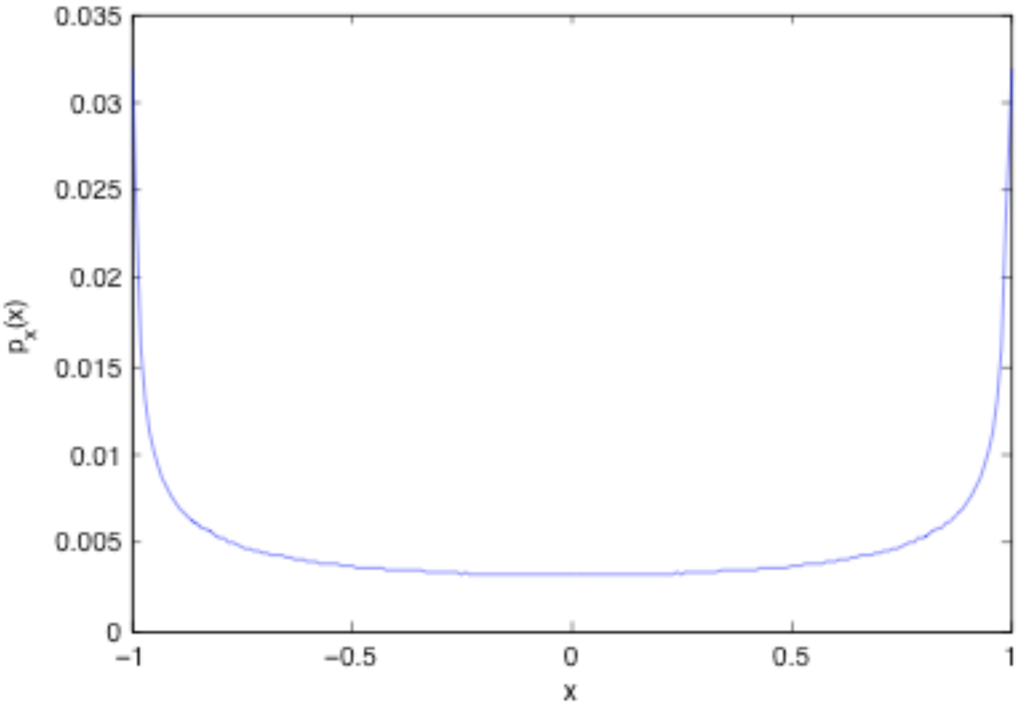
$$2\cdot\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(t)dt = \frac{A^2}{T}\; t\Big|_0^T$$

$$\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(t)dt = \frac{A^2}{2}$$

Beide Berechnungsmethoden ergeben also ein übereinstimmendes Ergebnis.

c. Erzeugen Sie in Matlab ein Sinus-Signal mit einer Periodendauer von 44100 Samples und einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz und stellen Sie dessen WDF dar. Überlegen Sie dafür, wie Gl. 1 für den zeit- und wertediskreten Fall aussieht.

```
% 2c)

% Abtastfrequenz,
fs = 44100;
n  = 1:44100;
A  = 1;

% Sinus
x = A*sin(n*2*pi/fs);

% Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion
amp = -A:.01:A;

[H] = hist(x, amp);
h   = H/sum(H);

plot(amp, h)
```



d. Berechnen Sie die Leistung des Sinus-Signals mit Hilfe der WDF

```
% 2c)
% Berechnung der Leistung
P = sum(amp.^2.*H)
```

Matlab-Funktionen: plot, hist

3. Aufgabe: Autokorrelation und Leistungsdichtespektrum von Rauschen

Autokorrelationsfunktion

Die Autokorrelationsfunktion eines Signals ist definiert als der Erwartungswert des Produktes zweier Amplitudenwerte desselben Zufallssignals zu unterschiedlichen Zeitpunkten und hängt bei stationären Signalen nur von der Verschiebung dieser Zeitpunkte zueinander ab:

$$\varphi_{xx}(\tau) = E\left\{x(t)x(t-\tau)\right\}$$

Ihre Fouriertransformierte, das Leistungsdichtespektrum, liefert Informationen über die spektrale Verteilung der Leistung eines Signals.

Gegeben sei ein bandbegrenztes, weißes Rauschsignal mit dem Leistungsdichtespektrum

$$S_{xx}(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \le \omega_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a. Berechnen Sie die Leistung des Rauschsignals.

Allgemein gilt: $P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)d\omega$

Hier: $P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} S_0 d\omega = \frac{S_0}{2\pi}\omega\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{2\omega_0 S_0}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{\omega_0 S_0}{\pi}}}$

b. Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{xx}(\tau)$ des Signals.

Allgemein ist $\varphi_{xx}(\tau) = F^{-1}\{S_{xx}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega$

Hier ist also: $\varphi_{xx}(\tau) = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\cos(\omega\tau)d\omega + \underbrace{j\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\sin(\omega\tau)d\omega}_{=0}$

$$= \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\cos(\omega\tau)d\omega = \frac{S_0}{2\pi\tau}\sin(\omega\tau)\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = S_0\cdot\frac{\sin(\omega_0\tau)-\sin(-\omega_0\tau)}{2\pi t}$$

mit sin(x)=-sin(-x)

$$= S_0\cdot\frac{2\sin(\omega_0\tau)}{2\pi t} = S_0\cdot\frac{2\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)}{2\pi\tau} = S_0\cdot\frac{\cancel{1/T_0}}{\cancel{1/T_0}}\cdot\frac{2\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)}{2\pi\tau} = \frac{2S_0}{T_0}\cdot\frac{\sin\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)}{\frac{2\pi\tau}{T_0}} = \underline{\underline{\frac{2S_0}{T_0}si(\omega_0\tau)}}$$

c. Bestimmen Sie aus der AKF die Leistung des Signals und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wert aus a).

$P = \varphi_{xx}(0) = \frac{2S_0}{T_0} = \frac{2\pi S_0}{T_0\pi} = \underline{\underline{\frac{\omega_0 S_0}{\pi}}}$

Für $\tau = 0$ ergibt sich die Signalleistung P als identisch mit der im Frequenzbereichbereich in Aufgabe a) bestimmten.

d. Geben Sie die AKF desselben Signals an, diesmal für einen nicht Bandbegrenzten Fall. Wie interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu Aufgabe b)?

$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{-j\omega t}d\omega = \frac{S_0}{2\pi}\delta(\tau)$

Die si-Funktion aus Aufgabe b) ist im Vergleich dazu eine Annäherung an den Delta-Impuls, wie sie in der Realität vorkommt.