Prof. Dr. Stefan Weinzierl 6.12.2012

Musterlösung: 7. Dezember 2012, 17:20

1 Gütekriterien von A/D- und D/A-Wandlern

a) Was versteht man unter den Begriffen Linearitätsfehler und Jitter?
Lösung: Als Linearitätsfehler werden Unregelmäßigkeiten in der Wandlerkennline, hervorgerufen durch Bauteiltoleranzen der Widerstände, bezeichnet. Sind diese größer als ±1 LSB wird von einem Monotoniefehler gesprochen. Linearitätsfehler verursachen nichtlineare Verzer-rungen.

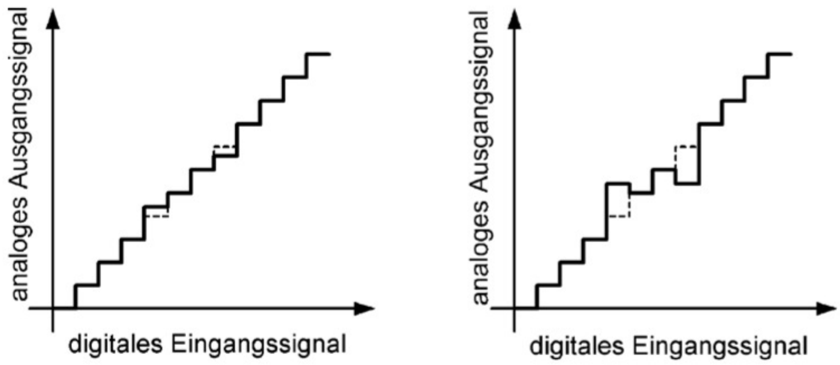


Abbildung 1: Linearitätsfehler (links) und Monotoniefehler (rechts). Grafik aus: S Weinzierl (Hrsg., 2008): Handbuch der Audiotechnik, Heidelberg, Springer.

Jitter, auch Phasenrauschen genannt, kommt zustande, wenn ein Signal bei der Wandlung nicht an den vorgesehenen Stellen abgetastet wird. Es entstehen Verzerrungen, die bei einem zufällig verteiltem Jitter in ein Rauschen übergehen.

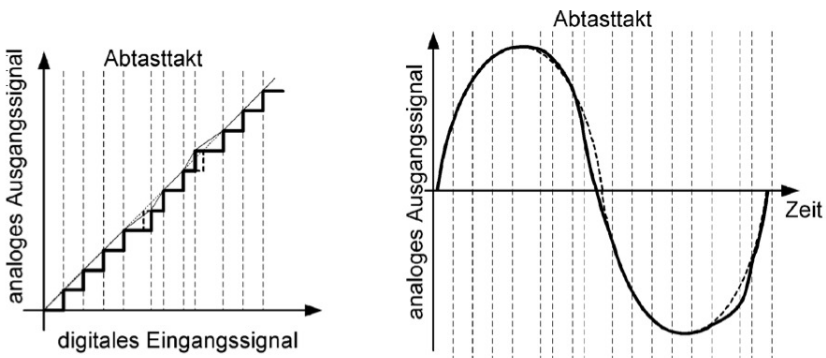


Abbildung 2: Amplitudenfehler durch Jitter: Wandlerkennline (links) und Sinussignal (rechts). Aus: S Weinzierl (Hrsg., 2008): Handbuch der Audiotechnik, Heidelberg, Springer.

b) Erläutern Sie das Messverfahren für die Größen THD+N und Dynamic Range.
Lösung:

THD+N:
THD+N (total harmonic distortion plus noise) ist das Verhältnis aller Oberschwingungen inkl. Grundrauschen zu den Oberschwingungen, Grundrauschen und dem voll ausgesteuerten Messsignal (Effektivwerte[1]). Der THD+N ist also einfacher zu messen als der THD allein, da bei letzterem auch Aliasinganteile der Obertöne an völlig anderen Positionen als der Obertonreihe auftreten können und berücksichtigt werden müssten. Diese aufwändige Spektralanalyse kann entfallen, da beim THD+N einfach „alles“ im hörbaren Audiobereich in den Messwert einfließt, was sich vom Messton unterscheidet. Die Messung berücksichtigt somit nicht nur harmonische Oberwellen, sondern das gesamte Störspektrum ein-schließlich unharmonischer Anteile, Einstreuungen, Brummen, Rauschanteile u.ä.

Ablauf der Messung:
- rege mit $f_0 = 997$ Hz Ton bei $-0,5$ dB FS $/-1$ dB FS an
- messe Effektivwert von Rauschen und Verzerrungsprodukten im gesamten Audioband bei Unterdrückung von f_0 durch Notch-Filter
- bilde Verhältnis zu ungefiltertem Signal und berechne Pegel:

$$THD + N = 10\log_{10}\left(\frac{THD + N}{S_{FS}}\right)$$

Notation z.B.: THD+N (997 Hz, -1 dB FS) = -85 dB FS

Für das Grundrauschen wird üblicherweise kein Gewichtungsfilter verwendet, da von voll ausgesteuerten also „lauten“ Nutzsignalen ausgegangen wird (ungefähr linearer Bereich der Hörkurve).

Dynamic Range:
Dynamic Range – teils auch SNR genannt – bezeichnet das Verhältnis eines vollaussteuerten Signals zum (frequenzbewerteten) Grundrauschen. Dabei kann das Grundrauschen sowohl in Abwehsenheit, als auch in Anwesenheit eines (leisen) Signals (-60 dB FS) ermittelt werden. Es erscheint in der AES-17-Norm als „Signal-to-Noise Ratio (SNR) in the presence of a signal“.

Ablauf der Messung:
- zur Angabe des DR-Wertes muss vorher eine Full-Scale-Messung stattgefunden haben
- ein Messton von $f_0 = 997$ Hz bei -60 dB FS, der nur nichtlineare Anteil unterhalb des Rauschteppichs erzeugt, wird benutzt ,um den Effektivwert von Rauschen (und Verzerrungsprodukten) im gesamten Audioband bei Unterdrückung von f_0 durch Notch-Filter zu messen
- bilde Verhältnis zur Full-Scale-Spannung und berechne Pegel:

$$DR = 10\log_{10}\left(\frac{S_{FS}}{N}\right)$$

Notation z.B.: DR = 85 dB FS A

Gewichtungsfilter z.B.: A, CCIR

[1]Die Festlegung der Fullscale-Amplitude erfolgt dabei während der Messung selbst, da diese nach der AES-17 Norm wie folgt definiert ist: „... wenn das digitale Signal nicht zugänglich ist, wird Input-Fullscale 0,5 dB unterhalb des Amplitudenwertes eines 997-Hz-Sinustons gesetzt, bei dem 1% THD+N oder 0,3dB Kompression erreicht werden...“.

2 TP-BP-Transformation

Ein idealer Tiefpass hat den Betragsfrequenzgang

$$H_{TP}(j\omega) = \begin{cases} A & , \ |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Durch Faltung seines Betragsspektrums mit zwei um ω_m und $-\omega_m$ verschobenen Dirac-Impulsen, gegeben durch

$$H_{BP}(j\omega) = H_{TP}(j\omega) * [\delta(\omega + \omega_m) + \delta(\omega - \omega_m)] \ ,$$

kann der Tiefpass in einen Bandpass mit der Mittenfrequenz ω_m transformiert werden.

a) Veranschaulichen Sie die TP-BP-Transformation grafisch.
Lösung: Die Transformation des Tiefpasses zum Bandpass durch Faltung mit den Diracimpulsen bewirkt eine Verschiebung der Tiefpassfunktion nach ω_m und $-\omega_m$.

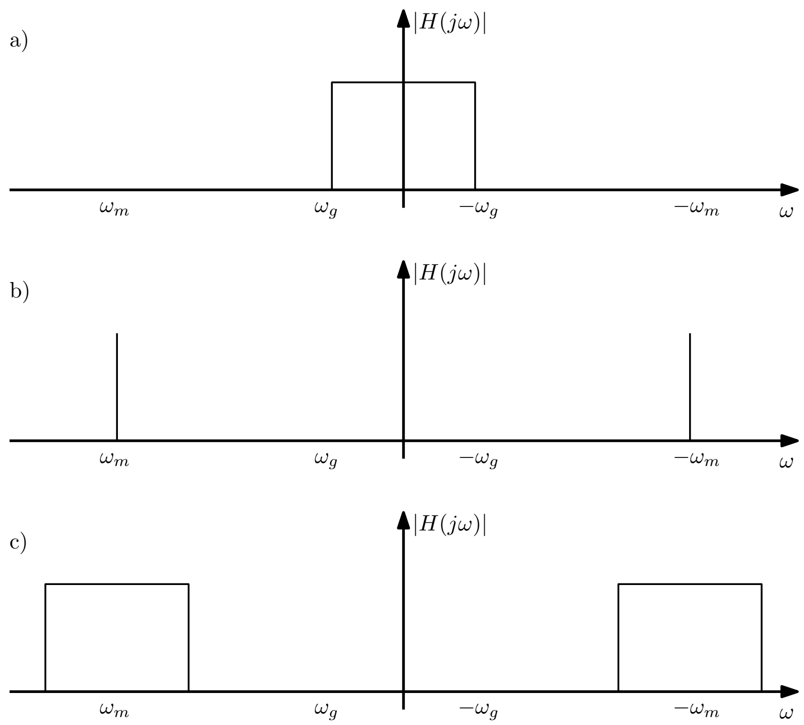


Abbildung 3: a) Tiefpass, b) Diracimpulse, c) Bandpass

b) Berechnen Sie die Impulsantworten von Tief- und Bandpass. Überlegen Sie dafür, welche Auswirkung die Faltung mit den Diracimpulsen im Zeitbereich hat.
Lösung: Die Impulsantwort des Tiefpasses ergibt sich durch inverse Fouriertransformation wie folgt:

$$\begin{aligned} h_{TP}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} A \cdot e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_g}^{\omega_g} = \frac{A}{2\pi} \frac{1}{jt} \left[e^{j\omega_g t} - e^{-j\omega_g t} \right] \\ &= \frac{A}{2\pi} \frac{1}{jt} 2j \sin(\omega_g t) = \frac{2A}{2\pi} \frac{1}{t} \frac{f_g}{f_g} \sin(\omega_g t) = 2Af_g \mathrm{si}(\omega_g t) \end{aligned}$$

Im Zeitbereich bewirkt die Faltung mit den Dirac-Impulsen eine Multiplikation mit deren invers Fouriertransformierten, gegeben durch

$$x(t)h(t) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega)$$

Die Beiden Dirac-Impulse sind das Spektrum einer Cosinus-Funktion, was z.B. durch nachschlagen festgestellt werden kann

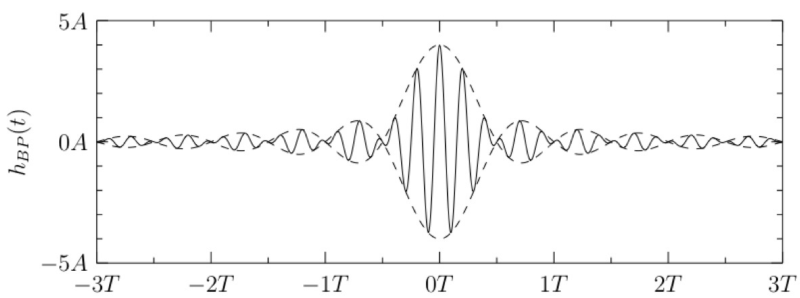
$$F\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

Jetzt kann die Impulsantwort des Bandpasses berechnet werden.

$$\begin{aligned} h_{BP} &= 2\pi\ h_{TP} \cdot \frac{1}{\pi} \cos(\omega_m t) \\ &= 4Af_g\ \mathrm{si}(\omega_g t)\ \cos(\omega_m t) \end{aligned}$$

c) Skizzieren Sie beide Impulsantworten. Welche Systemeigenschaften können ihnen entnommen werden?

Lösung:



Abgebildet sind die Impulsantworten für Tiefpass (gestrichelt und falsch skaliert. Das Maximum müsste bei 2A liegen) und Hochpass, für $f_m = 5f_g$. Da beide Impulsantworten symmetrisch sind, handelte es sich um linearphasige Systeme, die beide akausal sind, da Werte für $T < 0$ vorkommen. Die Akausalität kann durch Fensterung und Hinzufügen eines Delays umgangen werden.

3 Amplitudenstatistik digitaler Audiosignale

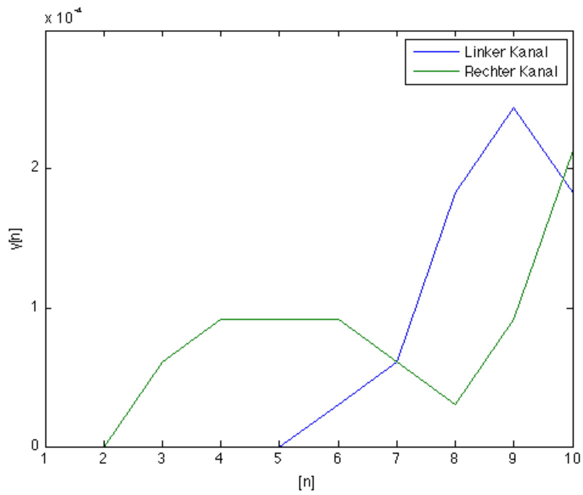
Lesen sie das Audiofile test.wav aus dem Downloadbereich in Matlab ein.

a) Welche Abtastfrequenz, Wortbreite und Länge weist die Audiosequenz auf?
Lösung:

```
%% a)
% Abtastfrequenz und Wortbreite der Audiodatei bestimmen
[y,fs,bits]=wavread('test');
length_y = length(y)/fs;
% ---> Fs=44100 ---> bits=16 ---> 2?Kanalfile ---> 6.56 Sekunden lang
```

b) Plotten Sie die Amplituden der ersten 10 Samples für den rechten und linken Kanal.
Lösung:

```
%% b)
figure
plot(y(1:10, :))
legend('Linker Kanal', 'Rechter Kanal')
ylabel 'y[n]';
xlabel '[n]'
```



c) Wie groß ist die Maximalamplitude des Wave-Files für rechten und linken Kanal in dB FS (dB full scale)?
Lösung: Fullscale bezieht sich auf ein voll ausgesteuerte .wav-File, mit einem Wertebereich von $[-1, 1]$. Eine Amplitude von 1 liefert, also einen Wert von 0 $dB\,Fs$.

```
%% c)
% Maximalamplituden des rechten/linken Kanals in dBFS bestimmen
dBFS_links=20*log10(max(abs(y(:,1))));  %---> 0.1778 dBFS
dBFS_rechts=20*log10(max(abs(y(:,2)))); %---> 0.4435 dBFS
```

d) Wie lautet Gl. 1 für ein zeit- und wertediskretes Signal?

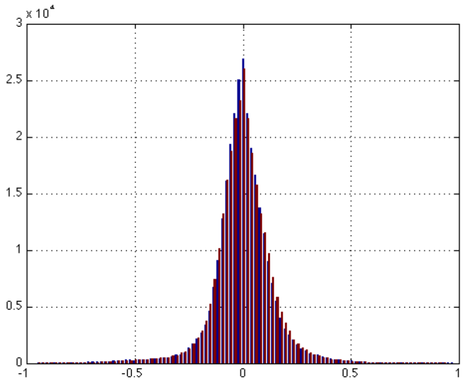
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1 \qquad (1)$$

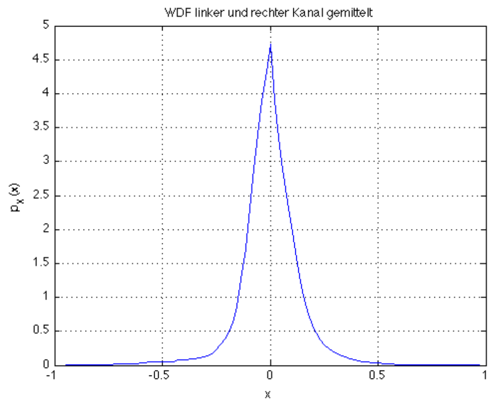
Lösung: Das Integral geht in eine Summe, die über die Wahrscheinlichkeiten der diskreten Amplitudenstufen läuft. Die Fläche einer Amplitudenstufe ergibt sich durch Multiplikation mit der Stufenbreite.

$$\sum_{i=1}^{N} p_X(x_i) \cdot \triangle x_i \stackrel{!}{=} 1$$

e) Berechnen Sie eine WDF für die Amplituden innerhalb der Audiosequenz. Teilen Sie dafür den Amplitudenbereich in 100 äquidistante Intervalle, berechnen Sie die Anzahl der Samples in diesen Intervallen und skalieren sie die Verteilungsfunktion so, dass die Normierung nach Gl. 1 erfüllt ist.
Lösung:

```
%% e)

% WDFs der Amplituden beider Audiokanaele berechnen
% normiere Flaeche der WDF auf 1
% Absolute Haufigketen durch Auszaehlung der Amplitudenanzahl in?nerhalb
% diskreter aequidistanter Intervalle ??>Histogramm
nbins=100; % Intervallanzahl
[h, intervallmitten] = hist(y,nbins);
figure
hist(y,nbins)
grid on

% ??> zeigt Anzahl der Haeufigkeiten in den 100 Intervallen
% zwischen Max und Min von y getrennt fuer linken und rechten Kanal
% Kanaele zusammenlegen
h = mean(h, 2);

% WDF durch Normierung der Flaeche des Histogramms auf 1:
% Dazu dividiere Anzahl pro bin durch Gesamtanzahl der Samples UND
% (!) Intervallbreite der Histogrammbalken
intervallbreite = ( max(max(y)) + abs(min(min(y))) ) / nbins;
wdf = h / (sum(h * intervallbreite));

% Plot
figure
plot(intervallmitten,wdf)
title('WDF linker und rechter Kanal gemittelt')
xlabel('x')
axis([-1 1 0 5])
ylabel('p_{X}(x)')
grid on
```



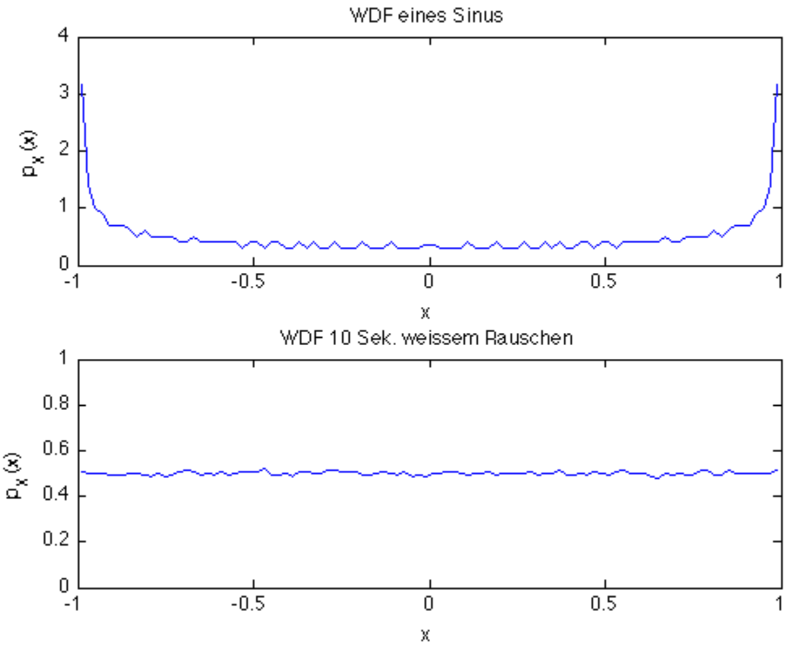


f) Plotten Sie im Vergleich dazu die WDF für die Amplituden eines vollausgesteuerten Sinussignals und einer vollausgesteuerten weißen Rauschfolge. Erzeugen sie hierfür ein 1 Sekunde langes Sinussignal mit der Frequenz f = 1 kHz und der Samplingfrequenz 44100 kHz, sowie eine weiße Rauschfolge mit identischer Dauer und Samplingfrequenz. Geben Sie zur Hörkontrolle alle Signale über die Audiokarte Ihres Rechners aus.

Lösung:

```
%% f)
%Plotte WDFs von Sinuston und weissem Rauschen (1sec)
fs = 44100;
n  = 1:fs;

% 1kHz Sinus
f_sin = 1000;
sinus = sin(n*2*pi*f_sin/fs);

%Rauschen: 1 sec bei fs=44100Hz;
noise = (rand(1,44100)-0.5)*2;

% Absolute Haeufigkeiten
[h_sin, sin_mitten] = hist(sinus,nbins);
[h_noise, noise_mitten] = hist(noise,nbins);

% Intervallbreite
intervallbreite_sinus = ( max(sinus) + abs(min(sinus)) ) / nbins;
intervallbreite_noise = ( max(noise) + abs(min(noise)) ) / nbins;

% WDF durch Normierung
wdf_sinus = h_sin / (sum(h_sin) * intervallbreite_sinus);
wdf_noise = h_noise / (sum(h_noise) * intervallbreite_noise);

%Plots
figure
subplot(2,1,1)
plot(sin_mitten,wdf_sinus),
title('WDF eines Sinus')
xlabel('x'),
axis([-1 1 0 4])
ylabel('p_{X}(x)')
subplot(2,1,2)
plot(noise_mitten,wdf_noise)
title('WDF 10 Sek. weissem Rauschen')
xlabel('x')
axis([-1 1 0 1]),ylabel('p_{X}(x)')
```

```
%% Audiowiedergabe
soundsc(noise(1:fs), fs)
%%
soundsc(sin(1:fs), fs)
```



Matlab-Funktionen: wavread, plot, hist, max, min, abs