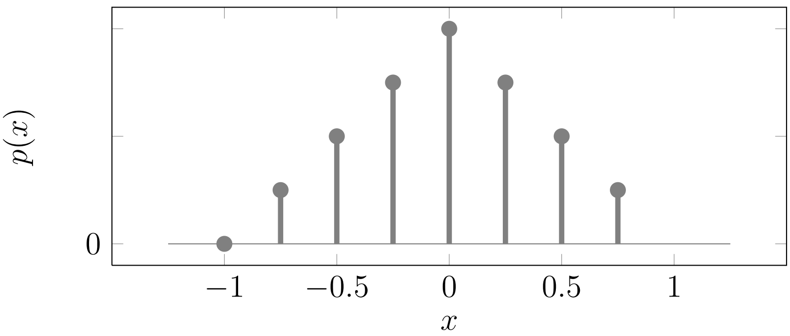
Prof. Dr. Stefan Weinzierl 29.11.2012

Musterlösung: 7. Dezember 2012, 17:17

Huffmankodierung

Gegeben ist ein dreieckverteiltes Signal als digitale Zufallszahlenfolge mit einer Wortbreite von 3 bit und folgender diskreter Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:



a) Skalieren Sie die Auftretenshäufigkeit $p(x)$ der 8 Amplitudenstufen auf der y-Achse so, dass die Normierung für die WDV erfüllt ist:

$$\sum p_i = 1$$

LÖSUNG:

Zur Normierung werden sämtliche Amplitudenstufen durch ihr Verhältnis zur maximalen Amplitude p_0 bei $x = 0$ bestimmt. Durch die Steigung zweier Geraden ergibt sich hier:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0 + 2\tfrac{3}{4}p_0 + 2\tfrac{1}{2}p_0 + 2\tfrac{1}{4}p_0 \\ &= 4p_0 \\ p_0 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

b) Weisen Sie durch Beschriften der Abszisse den 8 Amplitudenstufen einen Quellkode in 2er-Komplement-Darstellung mit 3 bit Wortbreite zu.

LÖSUNG:
Die Darstellung im Zweierkomplement ergibt sich durch folgende Wertigkeit der Bits:

Bit	1	2	3
Wert	$\frac{-2^3}{2}$	2^1	2^0

Stufe	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Wert	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
Codewort	100	101	110	111	000	001	010	011	

c) Wie groß ist die Entropie der Quelle? Wie groß ist die Koderedundanz des gleichmäßigen 3-Bit-Quellkodes?[1]

LÖSUNG:
Zunächst wird der Informationsgehalt der einzelnen Quantisierungsstufen bestimmt:

$$H_i = -\log_2(p_i)\mathrm{Bit} \tag{2}$$

Stufe	-3	-2	-1	0	1	2	3
Wert	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
H_i	4	3	2.42	2	2.42	3	4

Die Entropie ergibt sich dann nach folgender Formel:

$$\begin{aligned} H_m &= \sum p_i H_i \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{16} \cdot 4 + 2 \cdot \tfrac{2}{16} \cdot 3 + 2 \cdot \tfrac{3}{16} \cdot 2,42 + \tfrac{4}{16} \cdot 2 \\ &= 2.6575\mathrm{Bit} \end{aligned} \tag{3}$$

Aus der mittleren Wortlänge $l_m = 3$ und der Entropie kann nun die Redundanz berechnet werden:

$$R_k = l_m - H_m = 3\mathrm{Bit} - 2.6575\mathrm{Bit} = 0.3425\mathrm{Bit} \tag{4}$$

d) Konstruieren Sie eine präfixfreie Huffman-Kodetabelle für diesen Quellkode und berechnen Sie die Koderedundanz für diesen Fall.

LÖSUNG:
Zunächst wird die Baumstruktur anhand der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse erstellt. Hierzu werden die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse in eine Zeile geschrieben, sortiert vom kleinsten Wert zum größten. Dann wird folgender Algorithmus eingesetzt:

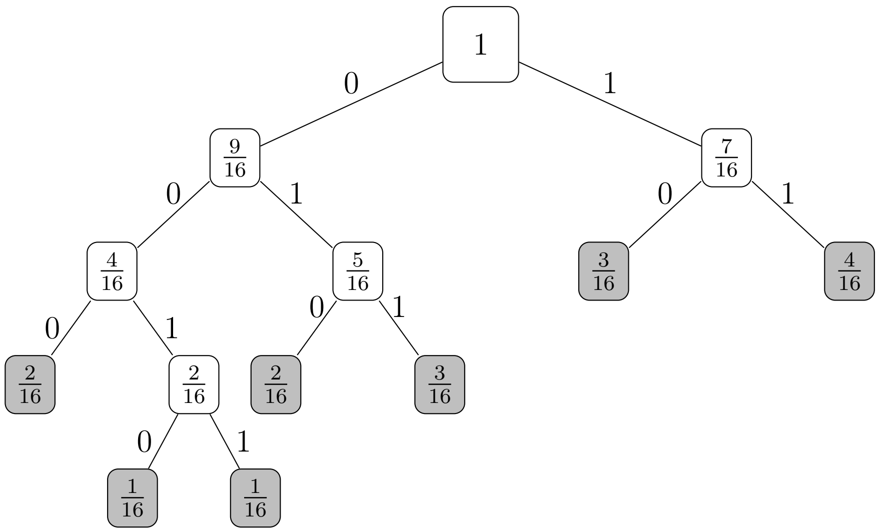
1. Zusammenfassen der zwei kleinsten Werte in der Zeile z_n
2. Erstellen einer neuen Zeile z_{n+1} unter Weglassen der zwei kleinsten Werte der vorherigen Zeile z_n und Hinzufügen derer Summe.
3. Aufsteigendes Sortieren der Werte in z_{n+1}

[1] Zur Berechnung auf dem Taschenrechner: $\log_2(x) = \log_{10}(x)/\log_{10}(2)$

Diese Vorschrift wird so oft wiederholt, bis in der letzten Zeile als einziger Wert 1 auftritt:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|l}
z_1 & \mathbf{\frac{1}{16}} & \mathbf{\frac{1}{16}} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \\
 & & & & & & & & \frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16} \\
z_2 & & \underline{\underline{\mathbf{\frac{2}{16}}}} & \mathbf{\frac{2}{16}} & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \\
 & & & & & & & & \frac{2}{16}+\frac{2}{16}=\frac{4}{16} \\
z_3 & & & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \frac{4}{16} & \\
 & & & & & & & & \frac{2}{16}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16} \\
z_4 & & & & \frac{3}{16} & \mathbf{\frac{4}{16}} & \frac{4}{16} & \underline{\frac{5}{16}} & \\
 & & & & & & & & \frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16} \\
z_5 & & & & & \frac{4}{16} & \frac{5}{16} & \underline{\frac{7}{16}} & \\
 & & & & & & & & \frac{3}{16}+\frac{4}{16}=\frac{7}{16} \\
z_6 & & & & & & \frac{7}{16} & \underline{\frac{9}{16}} & \\
 & & & & & & & & \frac{7}{16}+\frac{9}{16}=1 \\
z_7 & & & & & & & 1 &
\end{array}
\tag{5}
$$

Anschließend wird kann aus den so erstellten Zeilen der Codebaum generiert werden, indem von der untersten zur obersten Zeile alle Wahrscheinlichkeiten als Knoten und Blätter zur Baumstruktur hinzugefügt werden. Die Wahrscheinlichkeiten der Quantisierungsstufen sind in diesem Fall grau markiert. Um die Präfix-Freiheit einzuhelten werden nun alle linken Pfade mit einer “0” und alle rechten Pfade mit einer “1” gekennzeichnet.



Aus dem Codebaum können dann die Codewörter der Quantisierungsstufen abgelesen werden, indem von der Wurzel (“1”) zur entsprechenden Wahrscheinlichkeit die Bits der Pfade (von MSB zu LSB) aneinandergereiht werden:

WERT	CODEWORT
0	11
1	10
-1	011
2	010
-2	000
3	0010
-3	0011

e) Um welchen Kompressionsfaktor lässt sich die Bitrate des Signals durch Huffman-Kodierung reduzieren?

LÖSUNG:
Durch die Huffman-Codierung ändert sich die mittlere Wortlänge:

$$\begin{aligned} l_{m_H} &= 2\text{Bit} \cdot \tfrac{4}{16} + 2\text{Bit} \cdot \tfrac{3}{16} + 3\text{Bit} \cdot \tfrac{3}{16} + 2 \cdot 3\text{Bit} \cdot \tfrac{2}{16} + 2 \cdot 4\text{Bit} \cdot \tfrac{1}{16} \\ &= 2.6875\text{Bit} \end{aligned} \tag{6}$$

Aus dem Verhältnis von mittlerer Wortlänge im unkomprimierten Fall zu diesem Wert ergibt sich der Kompressionsfaktor:

$$c = \frac{l_m}{l_{m_h}} = \frac{3\text{Bit}}{2.6875\text{Bit}} = 1.116 \tag{7}$$