Technische Universität Berlin

Prof. Dr. Stefan Weinzierl 08.11.2012

Musterlösung: 12. November 2012, 15:50

1 Dither

a) Leiten sie den SNR eines idealen, linearen 8-bit Wandlers her. Nehmen sie ein vollausgesteuertes Sinussignal als Input an.

Lösung:

Für einen mit Rauschen gestörten, realen Kanal kann als Gütemaß das Signal-Rauschverhältnis angegeben werden. Ursächlich sei hier das Quantisierungsrauschen des (8-bit) AD-Wandlers. Das Signal-Rauschverhältnis SNR_V, bzw. sein logarithmiertes Pendant, der Signal-Rauschabstand $SNR_A[dB]$, ist wie folgt definiert:

$$SNR_V = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \tag{1}$$

$$SNR_A = 10\ log_{10}\left(SNR_V\right) \tag{2}$$

Für gleichspannungsfreie Signale, wie sie in der Nachrichtentechnik vorkommen (Sprache, Musik, oder auch Messtöne wie z.B. ein Sinuston) gilt auch:

$$SNR_V = \frac{\sigma^2_{signal}}{\sigma^2_{noise}} \tag{3}$$

Die Varianzen σ^2 entsprechen den quadrierten Effektivwerten der Signale. Da das SNR nur aus Verhältnissen gebildet wird, kann es auch aus den der Leistung proportionalen Varianzen berechnet werden. Im Folgenden müssen wir die Varianzen des Sinussignals (mit der Amplitude A) und des Quantisierungsrauschens bestimmen. Für das Sinussignal bestimmen wir σ_s^2 aus der Amplitude A zu:

$$\sigma_s = \tilde{A} \tag{4}$$

$$\tilde{A} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \tag{5}$$

$$\sigma_s^2 = \tilde{A}^2 = \frac{\hat{A}^2}{2} \tag{6}$$

Wir bestimmen die Varianz des Quantisierungsrauschens für einen idealen Wandler bei Vollaussteuerung aus der Amplitudendichteverteilung $p(x)$ der Quantisierungsfehlerspannungen. Die Spitzenamplituden des Quantisiererrauschens liegen im Bereich von $\pm\Delta/2$. Wir nehmen eine Gleichverteilung der Fehleramplituden im positiven und negativen Bereich einer halben Quantisierungsstufe Δ an. Die Dichtefunktion lautet damit:

$$p(x) = \begin{cases} 1/\Delta & \rightarrow |x| \leq \Delta/2 \\ 0 & \rightarrow sonst \end{cases} \tag{7}$$

Die Varianz des Quantisierungsfehlers berechnet man daraus zu:

$$
\begin{aligned}
\sigma_q^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3\Delta}[x^3]_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \\
&= \frac{1}{3\Delta}\left(\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 - \left(\frac{-\Delta}{2}\right)^3\right) \\
&= \underline{\underline{\frac{\Delta^2}{12}}}
\end{aligned}
$$

Nun haben wir beide Varianzen bestimmt und können daraus SNR_V und SNR_A berechnen. Dazu stellen wir die Signalamplitude $\hat{A}$ in σ_s^2 noch durch die $N = 2^n = 2^8 = 256$ (für den 8-bit Quantisierer) Quantisiererschritten der Größe Δ dar:

$$\hat{A} = \frac{N\Delta}{2} \tag{8}$$

also ist

$$\sigma_s^2 = \frac{\hat{A}^2}{2} = \frac{(N\Delta)^2}{8} \tag{9}$$

Das Signal-Rauschverhältnis bestimmt man jetzt einfach zu:

$$SNR_V = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \frac{(N\Delta)^2}{8}\ \frac{12}{\Delta^2} \tag{10}$$

Mit Ersetzen von N durch die Bitanzahl 2^n, erreichen wir schließlich das gesuchte Signal/Rauschverhältnis des n-bit Quantisieres für vollausgesteuerte Sinussignale in Abhängigkeit vn der Bitanzahl n:

$$SNR_V = \frac{(2^2\Delta)^2}{8}\ \frac{12}{\Delta^2} = \frac{2^{2n}12}{8} = \frac{3}{2}\ 2^{2n} \tag{11}$$

Der Signal-Rauschabstand berechnet sich daraus wie folgt:

$$
\begin{aligned}
SNR_A &= 10\ log_{10}(SNR_V) = 10\ log_{10}\left(\tfrac{3}{2}\right) + n10\ log_{10}(4) \\
&= \underline{\underline{1.76dB + n\ 6.02dB}}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Für $n = 8Bit$ ergibt sich ein SNR_V von 98304, das einem SNR_A von $49,9dB$ entspricht.

b) Beschreiben Sie die Wirkung von Dither. An welcher Stelle der Signalkette wird Dither eingesetzt? Erklären sie den Unterschied zwischen Rechteck- und Dreiecks-Dither.
Lösung:

Die Wirkung von Dither

Dither soll eben diesen worst-case, dass periodische Signale im Auflösungsbereich des letzten Bits zu Rechteckfolgen (mit resultierenden hochfrequenten und letztlich tonalen Aliasingstörfrequenzen) abgetastet werden, verhindern. Dieser Effekt tritt nicht nur bei diskreten Frequenzen auf, sondern auch bei breitbandigen Signalen. Im Ausklingen erhalten diese so einen immer harmonischeren Klangcharakter.

Um dieses Verhalten des Abtasters zu umgehen, wird dem Signal ein weißes Rauschen, z.B. mit einer normierten Amplitude, die genau der des halben LSB einer gegebenen Auflösung entspricht, hinzugefügt. Dies verhindert nun, dass der Quantisierer einen Sinus zu einem Rechteck „umtastet“ kann. Der mit dem Dither verrauschte Sinus wird stattdessen stochastisch im Takt der Abtastfrequenz mit ± 1 Bit Auflösung abgetastet. In dem ständigen Umschalten zwischen den zwei Zuständen wird der eigentlich nicht darstellbare Amplitudenverlauf des Nutzsignals in einer Art Pulsweitenmodulation codiert1. Damit wird es prinzipiell möglich, Amplituden darzustellen, die eigentlich schon unter dem Grundrauschpegel des Quantisierer liegen.
Obwohl Dither das Grundrauschen im Signal erhöht, verbessert er den Höreindruck. Er löst die Korrelation zwischen dem Nutzsignal und dem Quantisierungsrauschen auf, und das Spektrum des Quantisierungsfehlers bleibt, auch bei kleinen Signalamplituden, weiß.

An welcher Stelle der Signalkette wird Dither eingesetzt?

Bei der Aufnahme von Signalen sollte der Dither direkt vor dem A/D-Wandler hinzugefügt werden, um die oben beschriebenen, den Störabstand reduzierenden Effekte minimieren zu können. Des Weiteren sollte die Zugabe von Dither vor dem Ausgangs-D/A-Wandler der Wiedergabeeinrichtung möglich sein, um dieselben Effekte auch bei der Dequantisierung zu minimieren.

Unterschied zwischen Rechteck- und Dreiecks-Dither!

Rechteckdither ist charakterisiert durch seine, innerhalb eines Bereichs von ±1 2LSB gleichwahrscheinlich auftretenden, Rauschamplituden. Der Dreieckdither ist durch eine linear geringer werdende Wahrscheinlichkeit des Auftretens seiner höchsten Amplitudenwerte von ±1LSB gekennzeichnet. Er wird wegen seiner optimalen Rauschmodulationsunterdrückung am Häufigsten benutzt.

c) Welche Wirkung haben die beiden Dithertypen auf den in a) berechneten Signal-Rauschabstand?
Lösung:

Rechteckdither mit der Amplitude $\mathbf{A} = \pm\frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbf{2}}$:

Da die Dichtefunktion des hier verwendeten Dithers der des Quantisiererrauschens entspricht, kann hier mit der zuvor berechneten Varianz gerechnet werden:

$$\sigma_d^2 = \sigma_q^2 \tag{13}$$

Um den Einfluss auf den Signal-Rauschabstand zu quantifizieren, addieren wir die Quantisiererstörvarianz σ_q^2 und die Varianz des Dithers σ_d^2 (Leistungsaddition bei statistisch unabhängigen Quellen) und setzen sie zur Signalvarianz ins Verhältnis:

$$SNR_V = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2 + \sigma_d^2} = \frac{\sigma_s^2}{2\sigma_q^2} \tag{14}$$

Das SNRV lautet also nach Gleichung:

$$SNR_V = \frac{\sigma_s^2}{2\sigma_q^2} = \frac{(N\Delta)^2}{8} \, \frac{12}{2\Delta^2} \tag{15}$$

Der Signal-Rauschabstand SNR_A ergibt sich mit den Rechenregeln des Logarithmus zu:

$$\begin{aligned} SNR_A &= 10\ log_{10}(SNR_V) = 10\ log_{10}\left(\tfrac{12}{16}\right) + n10\ log_{10}(4) \\ &= \underline{\underline{-1.25dB + n\ 6.02dB}} \end{aligned} \tag{16}$$

Wir erhalten damit, unabhängig von der Anzahl der Quantisierungsstufen, einen um etwa $3dB$ schlechteren SNR als im Fall ohne Dither.

Dreieckdither mit der Amplitude $\mathbf{A} = \pm\boldsymbol{\Delta}$:
Die Varianz eines Dreieckdithers kann aus der des Rechteckdithers abgeleitet werden. Dreieckdither kann man aus der Summierung zweier statistisch unabhängiger Rechteckditherquellen erzeugen. Dieser Vorgang entspricht einer Faltung ihrer Amplitudendichteverteilungen. In diesem Fall gilt der Rechteckdither aus dem vorherigen Aufgabenteil als Ausgang für die Erzeugung des gefragten Dreieckdithers und es muss keine neue Varianz berechnet werden:

$$SNR_V = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2 + 2\sigma_d^2} = \frac{\sigma_s^2}{3\sigma_q^2} \tag{17}$$

Der Signal-Rauschabstand lautet somit:

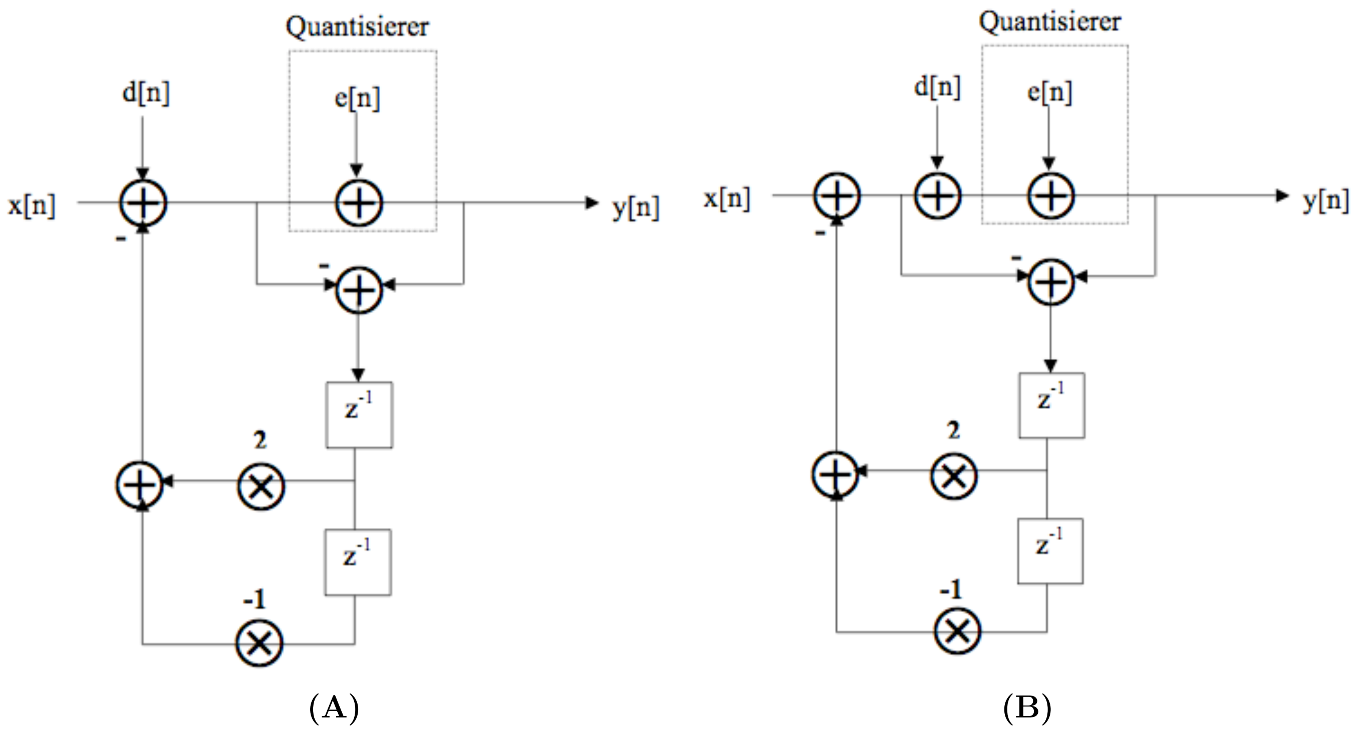
$$SNR_V = \frac{\sigma_s^2}{3\sigma_q^2} = \frac{(N\Delta)^2}{8}\,\frac{12}{3\Delta^2} \tag{18}$$

Und nach einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} SNR_A &= 10\,log_{10}(SNR_V) = 10\,log_{10}(0.5) + n10\,log_{10}(4) \\ &= \underline{\underline{-3.01dB + n\,6.02dB}} \end{aligned} \tag{19}$$

Wir erhalten damit, unabhängig von der Anzahl der Quantisierungsstufen, einen um etwa $4.7dB$ schlechteren SNR als im Fall ohne Dither.

2 Noiseshaping



a) Stellen Sie die Differenzengleichungen für die beiden dargestellten Noiseshaping-Systeme auf und berechnen Sie jeweils die Signal- und die Rauschübertragungsfunktion im Z-Bereich.

Lösung: **System A:**

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + d[n] + e[n] - 2e_0[n-1] + e_0[n-2] \\ e_0 &= x[n] + d[n] + e[n] - (x[n] + d[n]) \\ &= e[n] \\ \Rightarrow y[n] &= x[n] + d[n] + e[n] - 2e[n-1] + e[n-2] \end{aligned}$$

Transformiert in den z-Bereich

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + D(z) + E(z) - 2E(z)z^{-1} + E(z)z^{-2} \\ &= X(z) + \underbrace{D(z) + E(z)}_{Rauschen} \underbrace{\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)}_{spektraleFormung} \end{aligned}$$

ergeben sich Signal und Rauschübertragungsfunktion.

$$\begin{aligned} H_X(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = H_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = 1 \\ H_E(z) &= \frac{Y(z)}{E(z)} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \qquad \Rightarrow \text{Noiseshaping 2. Ordnung} \end{aligned}$$

System B:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + d[n] + e[n] - 2e_0[n-1] + e_0[n-2] \\ e_0 &= x[n] + d[n] + e[n] - x[n] \\ &= e[n] + d[n] \\ \Rightarrow y[n] &= x[n] + d[n] - 2d[n-1] + d[n-2] + e[n] - 2e[n-1] + e[n-2] \end{aligned}$$

Transformiert in den z-Bereich

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) + D(z) - 2D(z)z^{-1} + D(z)z^{-2} + E(z) - 2E(z)z^{-1} + E(z)z^{-2} \\ &= X(z) + \underbrace{[D(z) + E(z)]}_{Rauschen} \underbrace{\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right)}_{spektraleFormung} \end{aligned}$$

ergeben sich Signal und Rauschübertragungsfunktion.

$$\begin{aligned} H_X(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 \\ H_E(z) &= \frac{Y(z)}{E(z)} = H_D(z) = \frac{Y(z)}{D(z)} = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \qquad \Rightarrow \text{Noiseshaping 2. Ordnung} \end{aligned}$$

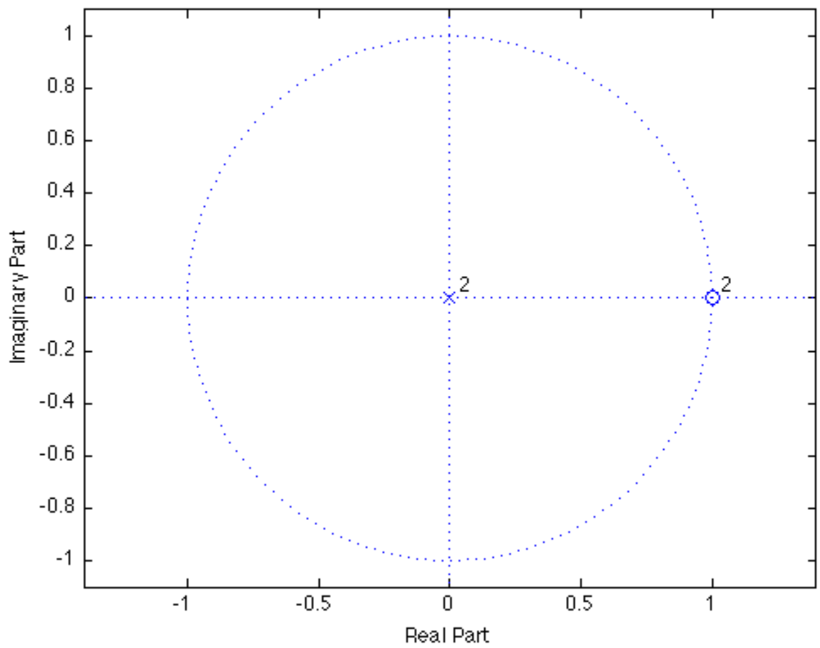
b) Berechnen Sie Null- und Polstellen der in a) berechneten Rauschübertragungsfunktion und stellen Sie diese im Pol-Nullstellen-Diagramm dar. Wie lässt sich die Übertragungsfunktion beschreiben?
Lösung:

$$1 - 2z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2}$$

Null- und Polstellen ergeben sich über die Berechnung der Nullstellen von Zähler- bzw. Nennerpolynom:

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \\ p_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

Bei $z = 1$ befindet sich also eine doppelte Nullstelle und bei $z = 0$ eine doppelte Polstelle. Aufgrund der Nullstellen bei 1, was der Frequenz f=0 Hz entspricht, wird eine Hochpass-übertragungsfunktion erwartet.



c) Welches der beiden Systeme aus a) würden Sie für eine Requantisierung eines digitalen Audiosignals wählen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Lösung: Im System A wird zwar der Quantisierungsfehler spektral geformt, nicht aber das Dithersignal. Dieses wird genau wie das Nutzsignal mit $H(z) = 1$ übertragen. Im System B hingegen wird auch das Dithersignal bei der Spektralformung berücksichtigt. Dieser Algorithmus wird deswegen bevorzugt.