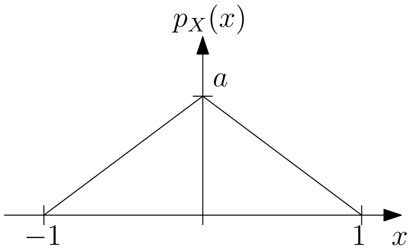
Prof. Dr. Stefan Weinzierl 25.10.2012

Musterlösung: 26. Oktober 2012, 10:48

1 Amplitudenstatistik analoger Signale

a) Ein Signal $x(t)$ hat die durch Abb. 1 gegebene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF bzw. PDF), die durch die Punkte $P1(-1|0)$, $P2(0|a)$ und $P3(1|0)$ verläuft. Wählen Sie a so, dass die durch Gl. 1 gegebene Voraussetzung erfüllt ist. Veranschaulichen Sie sich diese Voraussetzung.



$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{dx} = 1 \tag{1}$$

Lösung: Zunächst wird die WDF durch zwei Geradengleichungen beschrieben

$$p_X(x) = \begin{cases} ax + a & \text{,für } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -ax + a & \text{,für } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Dann kann a berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) &\stackrel{!}{=} 1 \\
\int_{-1}^{0} ax + a\; dx + \int_{0}^{1} -ax + a\; dx &= 1 \\
a\left(\int_{-1}^{0} x + 1\; dx + \int_{0}^{1} -x + 1\; dx\right) &= 1 \\
a\left(\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{0}^{1}\right) &= 1 \\
a\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0\right) &= 1 \\
a &= 1
\end{aligned}$$

Da das Integral die Fläche unter der WDF angibt, kann a auch einfach über den Flächeninhalts eines Dreiecks der Breite 2 und der Höhe a berechnet werden. Die Normierung von Gl. 1 besagt, dass zu jedem Zeitpunkt eine Amplitude auftreten muss.

b) Berechnen Sie das lineare und quadratische Mittel von $x(t)$, sowie dessen Varianz.
Lösung: Der lineare Mittelwert (auch Erwartungswert 1. Ordnung oder 1. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
E\{X\} = & \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx = \mu_x \\
= & \int_{-1}^{0} x(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^2 + x\, dx + \int_{0}^{1} -x^2 + x\, dx \\
= & \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} \\
= & \; 0 - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{2} - 0 \\
= & \; 0
\end{aligned}
$$

Der quadratische Mittelwert (auch Erwartungswert 2. Ordnung oder 2. Moment genannt) ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
E\{X^2\} = & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(-x+1)\, dx \\
= & \int_{-1}^{0} x^3 + x^2\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x^2\, dx \\
= & \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} \\
= & \; 0 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{3} - 0 \\
= & \; \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} \\
= & \; \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Es zeigt sich schnell, dass die Varianz in diesem Fall gleich dem quadratischen Mittelwert ist:

$$
\begin{aligned}
E\{|X-\mu_X|^2\} = & \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu_X|^2 \cdot p_X(x)\, dx = \sigma^2 \\
= & \int_{-1}^{1} x^2 \cdot p_x(x)\, dx = E\{X^2\}
\end{aligned}
$$

Es kann aber auch allgemein gezeigt werden, dass zunächst linearer und quadratischer Mittelwert berechnet werden können, um anschließend die Varianz zu berechnen (Verschiebungssatz).

$$
\begin{aligned}
E\left\{|X-\mu_X|^2\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-\mu_x|^2 p_X(x)\mathrm{dx} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\mathrm{dx}}_{=\mathrm{E}\{\mathrm{X}^2\}} - 2\mu_\mathrm{X} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\mathrm{dx}}_{=\mu_\mathrm{X}} + \mu_\mathrm{X}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{dx}}_{=1} \\
&= E\left\{X^2\right\} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E\left\{X^2\right\} - \mu_X^2
\end{aligned}
$$

c) Veranschaulichen Sie warum Signale mit einer um 0 gerade symmetrischen WDF immer Mittelwertfrei seien müssen.

Lösung: Ist ein Signal mittelwertfrei, hat es einen Mittelwert von 0. Der Mittelwert ist gegeben durch:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\mathrm{dx} \tag{2}$$

Abb. 1 veranschaulicht dies. Die gerade symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird durch die Multiplikation mit der ungerade symmetrischen Funktion $y = x$ ebenfalls ungerade symmetrisch. Dadurch heben sich die Flächenanteile links und rechts der y-Achse gegenseitig auf. Der Mittelwert muss also für diesen Fall immer Null sein.

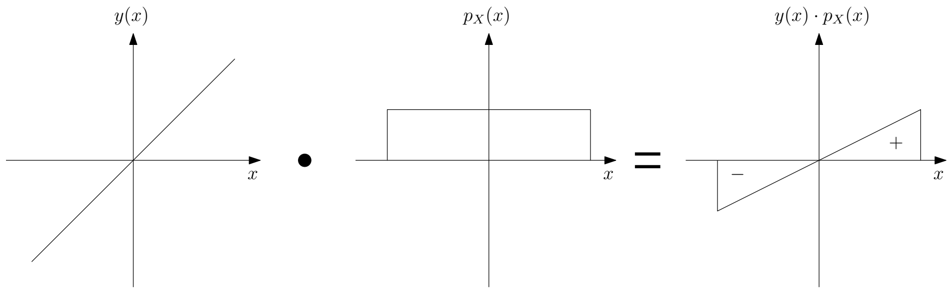


Abbildung 1: Erwartungswert bei gerade symmetrischer WDF

2 Autokorrelation, Leistung und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eines Sinussignals

Bei periodischen Signalen kann die Berechnung der AKF im Zeitbereich durch Integration über eine Periode erfolgen:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t) \cdot x(t-\tau)\mathrm{d}t$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Gleichung die AKF eines Sinussignals $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ und erläutern Sie anhand des Ergebnisses die Eigenschaften der AKF.
(Hilfe: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$)
Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t) \cdot x(t-\tau)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} A\sin(\omega t) \cdot A\sin(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2T}\int_{0}^{T} \cos(\omega t - (\omega(t-\tau))) - \cos(\omega t + (\omega(t-\tau)))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{2T}\int_{0}^{T} \cos(\omega\tau)\,\mathrm{d}t - \underbrace{\frac{A^2}{2T}\int_{0}^{T} \cos(2\omega t - \omega\tau)\,\mathrm{d}t}_{=0} \\
&= \frac{A^2}{2T}\cos(\omega\tau)t\Big|_{0}^{T} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)
\end{aligned}$$

Die Autokorrelationsfunktion eines Sinussignals ist ein Cosinussignal. Dies stimmt mit der Symmetrieeigenschaft der AKF überein sowie mit der Tatsache, dass zu einer periodischen Zeitfunktion eine ebenfalls periodische AKF gehört. Ersichtlich wird zudem, dass die AKF an der Stelle 0 maximal ist, wobei sich die Maxima mit jeder Periode wiederholen. Ohne Verschiebung ($\tau = 0$) ist die Funktion sich selbst am ähnlichsten, durch ihre Periodizität stimmt sie zusätzlich am Anfang jeder Periode wieder mit sich selbst überein.

b) Berechnen Sie die Leistung des Signals mit Hilfe der AKF und auf anderem Weg. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
Lösung: Die Leistung eines Signals ergibt sich durch Berechnung der AKF an der Stelle $\tau = 0$. Für den Sinus ist das:

$$\varphi_{xx}(\tau = 0) = P = \frac{A^2}{2} \tag{3}$$

Die Leistung kann im Zeitbereich auch ohne den Umweg der Autokorrelation berechnet werden, indem der quadrierte Sinus über eine Periodendauer integriert wird:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Das Integral kann mit Hilfe partieller Integration $\left(\int uv' = uv - \int u'v\right)$ gelöst werden ($u' = \omega\cos(\omega t)$ und $v = -1/\omega\cos(\omega t)$):

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\left|-\frac{1}{\omega}\sin(t)\cos(t)\right|_0^T + \int_0^T \frac{\omega}{\omega}\cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\ \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\underbrace{\left|-\frac{1}{\omega}\sin(t)\cos(t)\right|_0^T}_{=0} + \int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems $\left(\cos^2 + \sin^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 = 1 - \sin^2\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}\left[\int_0^T 1\,\mathrm{d}t - \int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t\right] \\ 2\cdot\frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{T}t\Big|_0^T \\ \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Beide Berechnungsmethoden ergeben also ein übereinstimmendes Ergebnis.

c) Erzeugen Sie in Matlab ein Sinus-Signal mit einer Periodendauer von 44100 Samples und einer Abtastfrequenz von 44.1 kHz und stellen Sie dessen WDF dar. Überlegen Sie dafür, wie Gl. 4 für den zeit- und wertediskreten Fall aussieht.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4}$$

Lösung: Aus dem Integral wird eine Summe über die Auftretenswahrscheinlichkeiten der diskreten Amplitudenstufen:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Der Sinus, im kontinuierlichen Fall durch $A\sin(\omega t)$ gegeben, wird im diskreten Fall zu $A\sin(\Omega\, n)$, wobei $\Omega = 2\pi f/f_s$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

```
%% c)
% Abtastfrequenz, Frequenz, diskreter Zeitvektor und Amplitude
fs = 44100;
f  = 1;
n  = 1:44100;
A  = 1;

% Sinus
x = A*sin(2*pi*f/fs * n);

% Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion
amp = -A:.01:A;

[H] = hist(x, amp);
h   = H/sum(H);

plot(amp, h)
xlabel 'x'
ylabel 'p_x(x)'
```

d) Berechnen Sie die Leistung des Sinus-Signals mit Hilfe der WDF
Lösung:
Die Leistung ist für mittelwertfreie Signale über den Erwartungswert 2. Ordnung gegeben:

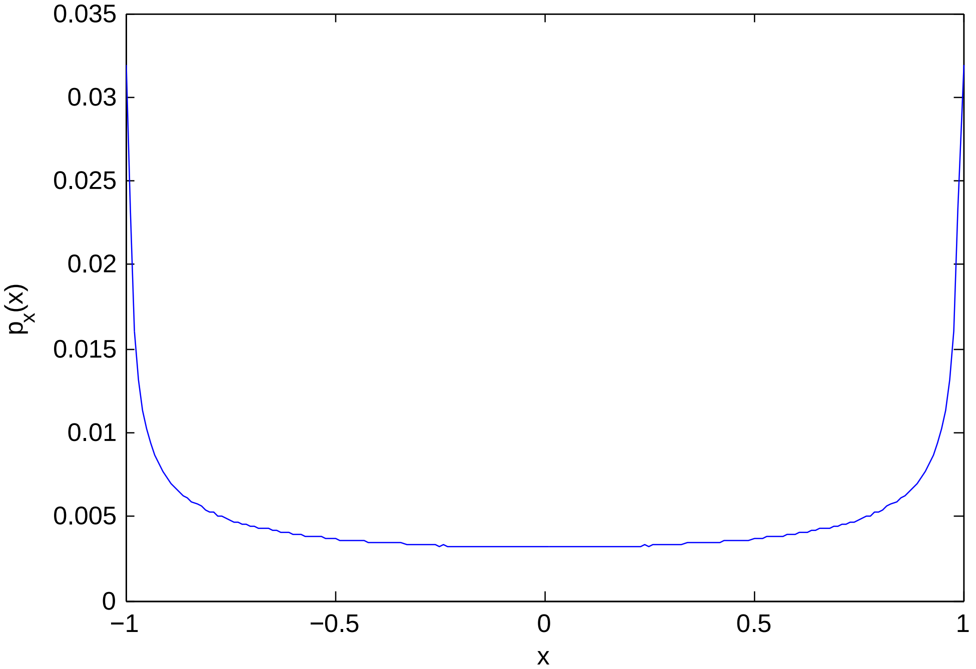
$$E\left\{X^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

Für den zeit- und wertediskreten Fall wird das Integral zu einer Summe:

$$E\left\{X^2\right\} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2\, p_i$$

```
%% d)
% Berechnung der Leistung
P = sum(amp.^2.*h)
```

Matlab-Funktionen: hist, sin


0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
p_x(x)
−1
−0.5
0
0.5
1
x