Prof. Dr. Stefan Weinzierl 20.06.2013

Musterlösung: 24. Juni 2013, 16:06

1 Richtcharakteristik von Mikrofonen

Die Gleichung für die ideale Richtcharakteristik von Mikrofonen lautet:

$$s(\theta) = A + B \cdot cos(\theta)$$

$s(\theta)$: Uebertragungsfaktor
A: Druckanteil
B: Gradientenanteil
$A + B = 1$

1) Berechnen und plotten Sie die idealen Richtcharakteristiken *Kugel*, *Niere* und *Superniere* in Matlab.

Lösung:
Code:

```
% Audiotechnik I - 6. Uebung
% Aufgabe 2.1

% Polardiagramme (2-D)

clear all;
close all;
clc;

%% Initialisierung eines Vektors der Oeffnungswinkel gegen die 0-Achse
theta = linspace(0, 2*pi, 1000);

%% Berechnung der Richtcharakteristiken
s_Kugel         = ones(size(theta));
s_BreiteNiere   = abs(0.67 + 0.33*cos(theta));
s_Niere         = abs(0.5 + 0.5*cos(theta));
s_Superniere    = abs(0.37 + 0.63*cos(theta));
s_Hyperniere    = abs(0.25  + 0.75*cos(theta));
s_Acht          = abs(cos(theta));

%% Plotten der Richtcharakteristiken
figure;

% Kugel
subplot(2,3,1);
polar(theta, s_Kugel, 'k');
```

```
axis equal;
title('Polardiagramm Kugel')

% Breite Niere
subplot(2,3,2);
polar(theta, s_BreiteNiere, 'k');
axis equal;
title('Polardiagramm Niere')

% Niere
subplot(2,3,3);
polar(theta, s_Niere, 'k');
axis equal;
title('Polardiagramm Breite Niere')

% Superniere
subplot(2,3,4);
polar(theta, s_Superniere, 'k');
axis equal;
title('Polardiagramm Superniere')

% Hyperniere
subplot(2,3,5);
polar(theta, s_Hyperniere, 'k');
axis equal;
title('Polardiagramm Hyperniere')

% Acht
subplot(2,3,6);
polar(theta, s_Acht, 'k');
axis equal;
title('Polardiagramm Acht')
```

Code END

2) Als Bündelungsgrad γ bezeichnet man das Verhältnis der von einem idealen Kugelmikrofon aufgenommenen Leistung zu der von einem gerichteten Mikrofon mit gleichem Übertragungsfaktor aufgenommenen Leistung. Als relativer Abstandsfaktor (Distance Faktor, DSF) bezeichnet man das Verhältnis des Abstandes, in dem ein gerichtetes Mikrofon weiter von einer Schallquelle im Raum positioniert werden kann als ein ideales Kugelmikrofon, bei gleichem augenommenen Direkt-Diffus-Schallverhältnis. Leiten Sie in Abhängigkeit der Größen A und B einen Ausdruck für den Bündelungsgrad des Mikrofons her. Das dürch die Winkeländerung $d\theta$ gegebene Flächenelement auf einem Kreis mit dem Radius r hat die Fläche: $dS = r \cdot d\theta \cdot 2\pi r \cdot sin(\theta)$.

Lösung:
Mathematisch lässt sich der Bündelungsgrad wie folgt ausdrücken:

$$\gamma = \frac{P_{Kugel}}{P_{Richt}}$$

Allgemein gilt für die Schallleistung, die auf das Mikrofon einwirkt (im Fernfeld):

$$P = \int_S I dS = \int_S \frac{p^2}{\rho c} dS$$

Die vom (gerichteten) Mikrofon tatsächlich aufgenommene Schallleistung entspricht dies jedoch nicht, sondern wird zusätzlich von der Richtcharakteristik des Mikrofons beeinflusst:

$$P = \int_S \frac{(p \cdot s(\theta))^2}{\rho c} dS$$

Dabei gibt $s(\theta)$ winkelabhängig und dimensionslos die Richtcharakteristik des Mikrofons an. Der einfallende Schalldruck wird um den Wert von $s(\theta)$ vermindert. Dieser ist aus Gleichung 1 gegeben. Die Werte von A und B bestimmen die genaue Form der Richtcharakteristik. A und B summieren sich immer zu 1, sodass $s(0) = 1$ für alle Charakteristiken gilt. Für $A = 1$ und $B = 0$ bekommt man eine Kugelcharakteristik, im Falle von $A = 0$ und $B = 1$ ergibt sich eine Achtercharakteristik.

Für die Kugel charakteristik gilt dann:

$$P_{Kugel} = \int_S \frac{(p \cdot (a + Bcos(\theta)))^2}{\rho c} dS = \frac{(p \cdot 1)^2}{\rho c} \cdot \int_S dS = \frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2$$

Für eine beliebige Richtcharakteristik gilt:

$$P_{Richt} = \int_S \frac{(p \cdot s(\theta))^2}{\rho c} dS = \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_S s^2(\theta) dS$$

Es ist also das Integral über die Oberfläche der Richtcharakteristik zu berechnen. Da die Richtcharakteristik rotationssymmetrisch zur 0-Richtung ist, ist dies am einfachsten zu lösen, wenn man infinitesimal kleine Kugelschichten betrachtet.

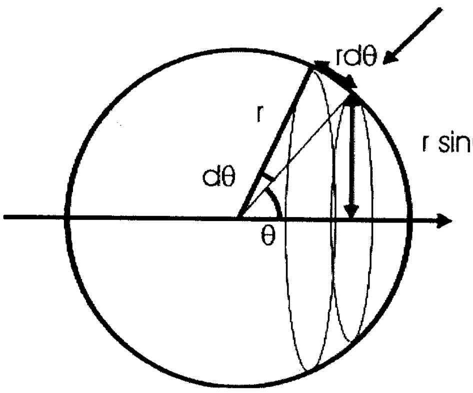

Abbildung 1: Flächenelement einer Kugelscheibe

Die Leistung berechnet sich schließlich nach:

$$
\begin{aligned}
P_{Richt} &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot 2\pi r^2 sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi s^2(\theta) \cdot sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi (A + Bcos(\theta))^2 \cdot sin(\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

Und wenn jeweils ein Integral für die Terme aufgestellt wird:

$$
\begin{aligned}
P_{Richt} &= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 (A^2 \int_0^\pi sin(\theta) d\theta + 2AB \int_0^\pi cos(\theta) sin(\theta) d\theta + B^2 \int_0^\pi cos^2(\theta) sin(\theta) d\theta) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 (A^2 [-cos(\theta)]_0^\pi + 2AB [\frac{1}{2} sin^2(\theta)]_0^\pi + B^2 [-\frac{1}{3} cos^3(\theta)]]_0^\pi) \\
&= \frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 (2A^2 + \frac{2}{3} B^2)
\end{aligned}
$$

Der Bündelungsgrad ergibt sich demnach zu:

$$
\gamma = \frac{P_{Kugel}}{R_{Richt}} = \frac{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 4\pi r^2}{\frac{p^2}{\rho c} \cdot 2\pi r^2 (2A^2 + \frac{2}{3} B^2)} = \frac{1}{A^2 + \frac{1}{3} B^2}
$$

3) Leiten Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Bündelungsgrad γ und dem Distance Factor DSF für viel gängige Richtcharakteristiken (Breite Niere, Niere, Superniere, Acht) aus den Ergebnissen vom vorigen Aufgabenteil und einem idealisierten Verlauf von Direkt- und Diffusfeld im Raum.

Lösung:
Am gleichen Punkt im Raum hat ein gerichtetes Mikrofon ein größeres Direkt-Diffusschall-Verhältnis als ein ungerichtetes Mikrofon. Mit anderen Worten: ein gerichtetes Mikrofon nimmt (wegen seiner nicht-kugelförmigen Richtcharakteristik) am gleichen Punkt im Raum weniger Diffusschall auf als ein ungerichtetes Mikrofon mit dem gleichen Übertragungsfaktor bei 0 Grad/vorne.

Um das gleiche Direkt-Diffusschall-Verhältnis zu erhalten muss man sich also mit dem gerichteten Mikrofon **weiter** von der Schallquelle entfernen, weil dort das Verhältnis von Direkt- zu Diffusschall des Raumes kleiner ist. Bzw. kann man sich mit einem gerichteten Mikrofon weiter von der Quelle sich positionieren als mit einem Kugelmikrofon, ohne das Direkt-Diffusverhältnis zu stören.

Im Raum überlagert sich an jedem Punkt das Direktschallfeld einer Schallquelle mit dem Diffusschallfeld. Der Schalldruck des idealisierten Diffusschallfelds ist dabei im gesamten Raum konstant, während der Schalldruck des Direktfeldes mit 1/r abnimmt. Somit nimmt auch das Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall mit 1/r ab.

Das von einem Mikrofon aufgenommene Verhältnis von Direktschall zu Diffusschall lässt sich ausdrücken durch das Verhältnis aus dem Übertragungsfaktor in 0-Richtung - also dem Schallanteil, was von vorne aufgenommen wird - zu dem Anteil was von allen anderen Seiten aufgenommen wird, also die Mittelung des Übertragungsfaktors über alle Raumrichtungen:

$$M_{diffus}(0) = M_0(0) \cdot s(\theta)$$

Unter Berücksichtigung des Übertragungsfaktors kann man die Gleichung für den Bündelungsfaktor noch so geschrieben werden:

$$\gamma = \frac{P_{Kugel}}{R_{Richt}} = \frac{\frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_S M_0^2 dS}{\frac{p^2}{\rho c} \cdot \int_S M_0^2 s(\theta)^2 dS} = \frac{M_0^2 \int_S dS}{M_0^2 \int_S s(\theta)^2 dS}$$

Beziehungsweise kann man schreiben:

$$M_{diffus}^2 = M_0^2 \int_S s^2(\theta) dS = \frac{M_0^2 \int_S dS}{\gamma} = \frac{M_{frei}^2}{\gamma} \rightarrow M_{diffus} = \frac{M_{frei}}{\sqrt{\gamma}}$$

Das macht deutlich, dass der Diffusfeldübetragungsfaktor ist um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ gegenüber dem Freifeldübertragungsfaktor reduziert. In der Pegelbetrachtung folgt dann:

$$L_{diffus} = 20log_{10}(M_{diffus}) = 20log_{10}\frac{(M_{frei}}{\sqrt{\gamma}}) = 20log_{10}(M_{frei}) - 20log_{10}(\sqrt{\gamma})$$

Also ist:

$$L_{diffus} = L_{frei} - 10log_{10}(\gamma) = L_{frei} - d$$

Das Diffusfeldübetragunsmaß ist also um das Bündelungsmaß kleiner als das Freifeldübertragungsmaß.

An einem bestimmten Ort nehmen Mikrofone ein bestimmtes Verhältnis von Direkt- zu Diffusschall auf. Gerichtete Mikrofone können, für dasselbe Verhältnis, weiter entfernt von der Schallquelle aufgestellt werden. Dabei wird $\sqrt{\gamma}$ als **Abstandsfaktor** angegeben. Zur Ableitung: Der Direktschall, also der unter Freifeldbedingungen auf das Mikrofon einfallende Schalldruck, nimmt in Abhängigkeit von der Entfernung r zur Schallquelle ab

$$p_{frei}(r) = \frac{1}{r} p_0 \cdot e^{-j(\omega t - kr)} = G \cdot \frac{1}{r}$$

In einem nicht vollstämdig reflexionsfreien Raum entsteht außerdem ein Diffusschallfeld, von dem definitionsgemäß angenommen wird, dass der Schalldruck ortsunabhängig konstant ist, also $p_{diffus}(r) = const.$ Für ein Kugelmikrofon ergeben sich im Abstand r_1 der Direkt- und der Diffusschallanteil $p_{frei,Kugel}(r_1) = G \cdot \frac{1}{r_1}$ und $p_{diffus,Kugel}(r_1) = p_{diffus,Kugel} = const.$ Ein richtMikrofon nimmt an derselben Stelle entsprechend nur ein Bruchteil des Diffusschalls auf: $p_{diffus,Richt} = \frac{p_{diffus,Kugel}}{\sqrt{\gamma}}$. Sucht man nun den Abstand r_2, an dem für ds Richtmikrofon dasselbe Verhältnis zwischen Direkt- und Diffusschall vorliegt wie für das KugelMikrofon an r_1, gilt dort:

$$p_{frei,Richt}(r_2) = G \cdot \frac{1}{r_2}$$

und

$$p_{diffus,Richt}(r_2) = p_{diffus,Richt} = \frac{p_{diffus,Kugel}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{const}{\sqrt{\gamma}}$$

Und für gleiche Verhältnisse:

$$\frac{p_{frei,Richt}(r_2)}{p_{diffus,Richt}(r_2)} = \frac{p_{frei,Kugel}(r_1)}{p_{diffus,Kugel}} \leftrightarrow \frac{G \cdot \frac{1}{r_2}}{\frac{p_{diffus,Kugel}}{\sqrt{\gamma}}} = \frac{G \cdot \frac{1}{r_1}}{p_{diffus,Kugel}} \leftrightarrow \sqrt{\gamma} \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1}$$

Also gilt $r_2 = r_1 \cdot \sqrt{\gamma}$, was zeigt, dass ein Richtmikrofon bei gleichem Direkt- zu Diffus-Verhältnis um den Faktor $\sqrt{\gamma}$ weiter von der Schallquelle aufgestellt werden kann.
Die Abstandsfaktoren für die Breite Niere (A = 0,67, B = 0,33), Niere (A = 0,5, B = 0,5), Superniere (A = 0,37, B = 0,63) und Acht (A = 0, B = 1) ergeben sich also zu:

$$DSF_{BreiteNiere} = \sqrt{\gamma_{BreiteNiere}} = \sqrt{(A^2 + \frac{1}{3}B^2)^{-1}} = \sqrt{(0,667^2 + \frac{1}{3}0,333^2)^{-1}} = 1,44$$
$$DSF_{Niere} = \sqrt{\gamma_{Niere}} = \sqrt{(0,5^2 + \frac{1}{3}0,5^2)^{-1}} = 1,73$$
$$DSF_{Superniere} = \sqrt{\gamma_{Superniere}} = \sqrt{(0,366^2 + \frac{1}{3}0,634^2)^{-1}} = 1,93$$
$$DSF_{Acht} = \sqrt{\gamma_{Acht}} = \sqrt{(\frac{1}{3}1^2)^{-1}} = 1,73$$

**Danke an Martin Schneider für seine Hinweise die klare Formulierung bezüglich der Ableitung des Abstandfaktors und die Erläuterungen zu Diffusfeldfrequenzgang.*

2 Laufzeitstereophonie

1) Erläutern Sie die Funktionsweise eines Laufzeitstereophonen Mikrofonsystems.

Lösung:
Tritt ein Schallereignis aus einer bestimmten Richtung beim Hörer ein, dann wird es zum einem an dem Schallereignis zugewandten Ohr geringfügig lauter wahrgenommen als am abgewandten Ohr, und zum anderen trifft es auf der abgewandten Seite mit einer gewissen Verzögerungszeit ein. Das menschliche Ohr wertet diese Informationen aus, um das Ereignis zu lokalisieren. Diese Tatsache bildet die Grundlage für die stereophonen Aufnahmeverfahren Laufzeitstereophonie, Pegeldifferenzstereophonie und Äquivalenzstereophonie.

Im Falle der Laufzeitstereophonie werden zwei Mikrofone in einem gewissen Abstand zueinander positioniert, sodass Schall, der etwas seitlich auf das Mikrofonsystem auftrifft unterschiedliche Laufzeiten zu den einzelnen Mikrofonen aufweist. Pegeldifferenzen, die sich durch diese Abstände ergeben, sind dabei sehr gering und werden in der Regel vernachlässigt.

Bei der Pegeldifferenzstereophonie befinden sich die Mikrofone am gleichen Ort, es entstehen also keine Laufzeitunterschiede zwischen denen. Stattdessen werden bei der dieser Art der Stereophonie stets gerichtete Mikrofone verwendet unf gegeneinander verdreht, sodass sich - bedingt durch die Richtcharakteristik der Mikrofone - bei verschiedenen Einfallsrichtungen verschiedene Pegeldifferenzen ergeben.

Die Äquivalenzstereofonie vereint die beiden Verfahren, indem gerichtete Mikrofone gegeneinander verdreht und in einem Abstand zueinander positioniert werden, sodass sowohl Laufzeit- als auch Pegelunterschiede entstehen.

2) Welchen Aufnahmewinkel besitzt ein AB-Mikrofonsystem, das eine Mikrofonbasis von 60cm aufweist?

Lösung:
Das Prinzip der Laufzeitstereofonie ist von folgender Skizze gegeben:

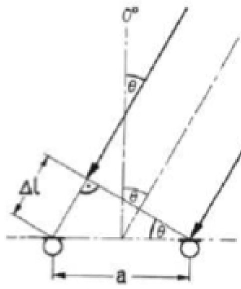

Abbildung 2: Laufzeitstereofonie

Dabei bezeichnet Δl die Wegdifferenz, die der Schall zum linken Mikrofon mehr zurücklegen muss, als zum rechten. Sie lässt sich mithilfe des Winkels θ und der Basisbreite α ausdrücken:

$$sin(\theta) = \frac{\Delta l}{\alpha} \rightarrow \Delta l = \alpha \cdot sin(\theta)$$

Ist die Schallgeschwindigkeit bekannt, lässt sich die Laufzeit berechnen nach:

$$c = \frac{\Delta l}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\alpha \cdot sin(\theta)}{c}$$

Der Aufnahmewinkel ergibt sich als $2 \cdot \theta_{max}$, wobei θ_{max} der Winkel ist, der gerade für eine Lokalisation der Schallquelle aus einem der beiden Lautsprecher sorgt. Dies ist bei einer Laufzeitdifferenz von ca. 1,2 ms der Fall. Demnach ergibt sich θ_{max} zu:

$$\theta = arcsin(\frac{\Delta t \cdot c}{\alpha}) \rightarrow \theta_{max} = arcsin(\frac{1,2 \cdot 10^{-3}s \cdot 340m/s}{60 \cdot 10^{-1}m}) = 43 \quad Grad$$

Der Aufnahmewinkel beträgt demnach $2 \cdot \theta_{max} = 86$ Grad.

3) Für eine Choraufnahme möchten Sie ein AB-Mikrofonsystem bestehend aus zwei Kugelmikrofonen verwenden. Das Ensemble hat eine Ausdehnung von 6m. Das Mikrofonsystem soll in einem Abstand von 4m vom Chor entfernt positioniert werden. Welche Basisbreite müssen Sie wählen, damit der Chor sich über die gesamte Breite der Lautsprecherbasis erstreckt?

Lösung:
Der maximale Öffnungswinkel ergibt sich zu

$$\theta_{max} = arctan(\frac{6m/2}{4m}) = 37 \quad Grad$$

Demnach ergibt sich als Basisbreite:

$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot c}{sin(\theta)} = \frac{1,2ms \cdot 340m/s}{sin(37)} = 68cm$$

4) Wie ändert sich die Lokalisation, wenn Sie statt der Kugelmikrofone Mikrofone mit Nierencharakteristik verwenden? Was ändert sich klanglich?

Lösung:
Sofern die Nierenmikrofone parallel ausgerichtet werden, ergibt sich keine veränderte Lokalisation, weil weiterhin die gleichen Laufzeitdifferenzen bestehen, und bei parallelem Schalleinfall keine Pegeldifferenzen hinzukommen. Es ändert sich jedoch der relative Pegel der Richtcharakteristik: Seitlich einfallend Schallwellen werden beispielsweise um 6 dB leiser aufgenommen als frontal einfallende. Darüber hinaus ergibt sich durch die Verwendung von Druckgradientenempfängern ein entsprechend tiefenärmeres Klangbild.