Technische Universität Berlin

Prof. Dr. Stefan Weinzierl 23.05.2013

Musterlösung: 22. Mai 2013, 10:55

1 Addition von physikalischen Schallgrößen

Eine Geige erzeugt am Hörerort x den Schalldruckpegel L.

1) Um wieviel dB ändert sich am Hörerort der Schalldruckpegel, wenn die Orchesterbesetzung von einer Geige auf zwei Geigen (in gleicher Entfernung vom Hörer) erhöht wird? (Hinweis: Handelt es sich um kohärente oder inkohärente Schallquellen? Wie addieren sich die physikalischen Schallgrößen?)

Lösung:
Die Signale der beiden Geigen sind inkohärent. Bei inkohärenten Schllaquellen addieren sich deren Leistungen und nicht die zugrunde liegenden Feldgrößen. Demnach ergibt sich der Gesamtpegel zweier Schallquellen mit gleichem Schalldruck p_1 wie folgt:

$$L_{ges} = 10 \cdot log_{10}((\frac{p_1}{p_0})^2 + (\frac{p_1}{p_0})^2) = 10 \cdot log_{10}(2 \cdot (\frac{p_1}{p_0})^2) = 10 \cdot log_{10}(\cdot(\frac{p_1}{p_0})^2) + 10 \cdot log_{10}(2)$$

Der erste Term bezeichnet den Schalldruckpegel einer einzelnen Geige, wobe der zweite die Pegelzunahme durch das Hinzufügen einer zweiten. Diese Pegelzunahme bei der Verdoppelung der Besetzung beträgt somit $3,01$dB.

2) Aus der Psychoakustik ist bekannt, dass für eine subjektive Verdoppelung der Lautheit eine Zunahme des Schalldruckpegels von 10 dB notwendig ist. Wie viel Geigen sind hierfür notwendig?

Lösung:

$$\Delta L = 10dB = 10 \cdot log_{10}(\frac{P_{mehrereGeigen}}{p_{eineGeige}}) \rightarrow P_{mehrereGeigen} = 10^{\frac{10}{10}} \cdot P_{eineGeige} = 10 \cdot P_{eineGeige}$$

Für eine Zunahme des Schalldruckpegels ist die 10-fache Leistung notwendig. Es werden demnach 10 Geigen benötigt um subjektiv die doppelte Lautstärke zu empfinden.

2 Moden

1) Erläutern Sie, was in der Raumakustik unter Stehenden Wellen und Raummoden verstanden wird.

Lösung:
Der Begriff einer stehenden Welle lässt sich am anschaulichsten anhand zweier sich parallel gegenüberstehender Wände veranschaulichen, zwischen denen eine ebene Schallwelle parallel zu den Wänden hin und her läuft. Durch die Refelxion an einer schallharten Wandfläche überlagern sich hin- und rücklaufende Wellen. Sinusförmige Schallwellen, deren halbe Wellenlänge (oder ganzzahlige Vielfache der halben Wellenlänge) mit dem Abstand der Wände übereinstimmen, überlagern sich dabei derart, dass sich die Maxima und Minima des resultierenden Schalldrucks an festen Orten

ausbilden. Die entsprechenden Frequenzen, bei denen sich stehende Wellen zwischen zwei parallelen Wänden ausbilden, lassen sich wie folgt berechnen:

$$d = n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot \frac{f}{2c} \rightarrow f = n \cdot \frac{c}{2d}$$

Raummoden sind nicht anderes als stehende Wellen und bilden sich in jedem Raum aus (auch in solchen, die keine sich parallel gegenüberstehenden Wände besitzen). An den entsprechenden Frequenzen treten in der Übertragungsfunktion des Raumes Maxima auf.

2) Erläutern Sie, was unter axialen, tangentialen und obliquen Moden eines quaderförmigen Raumes zu verstehen ist.

Lösung:
Axiale Moden sind solche Moden, die durch die Reflexion von Schallwellen an nur einem gegenüberliegenden Wandpaar entstehen, also entweder zwischen Vorder- und Rückwand, zwischen den beiden Seitenwänden, oder zwischen Decke und Boden. Tangentiale Moden hingegen entstehen durch Reflexion an zwei Wandpaaren und oblique Moden schließlich durch Reflexion an allen drei Wandpaaren. Die Berechnung der Moden erfolgt nach der Formel:

$$f = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{(\frac{l}{L_x})^2 + (\frac{m}{L_y})^2 + (\frac{n}{L_z})^2}$$

Darin sind L_x, L_y und L_z die Abmessungen des Raumes, also Länge, Breite und Höhe. l, m und n bezeichnen die Ordnungszahlen der Model und sagen gleichzeitig, wie viele Druckknoten sich zwischen den Wändern in den jeweiligen Richtungen ausbilden. So bezeichnet man $l = 1$, $m = 0$ und $n = 0$ die erste Mode in x-Richtung, die auch als $1 - 0 - 0$ Mode bezeichnet wird und genau einen Druckknoten zwischen den Wänden aufweist. Die $2 - 1 - 0$ Mode enthält zwei Druckknoten in x-Richtung, einen Knoten in y-Richtung und keinen in z-Richtung.

3) Veranschaulichen Sie mit Hilfe von MATLAB alle axialen und tangentialen Moden bis zur Ordnung 3-3-0 für einen 6m langen und 4m breiten Raum mit rechteckförmigem Grundriss. Plotten Sie dazu jeweils den Verlauf des Schalldrucks im Raum zu einem festen Zeitpunkt mithilfe der Funktion $image()$ über einem Gitter in 5cm-Schritten (Funktion $meschgrid()$). Geben Sie außerdem zu jedem Plot die zugehörige Modenfrequenz an.

Lösung:
Der Schalldruckverlauf einer stehenden Welle im dreidimensionalen Raum ergibt sich durch die Gleichung (C ist die Amplitude von p):

$$P_{lmn}(x, y, z) = C \cdot cos(\frac{l\pi x}{L_x}) \cdot cos(\frac{m\pi y}{L_y}) \cdot cos(\frac{n\pi z}{L_z}) \cdot e^{j\omega t}$$

Für den Plot zu einem festen Zeitpunkt setzen wir $t = 0$, die Amplitude des Schalldrucks setzen wir hier zu $C = 1$. Durch die Tatsache, dass die Ordnung in z-Richtung gleich 0 ist, ergibt sich der Schalldruckverlauf in diesem Fall durch die Gleichung:

$$P_{lmn}(x, y, z) = cos(\frac{l\pi x}{6m}) \cdot cos(\frac{m\pi y}{4m})$$

Mithilfe der Gleichung aus Aufgabenteil 2 lassen sich die Frequenzen der Moden berechnen. Sie ergibt sich beispielsweise bei der 1-1 Mode zu

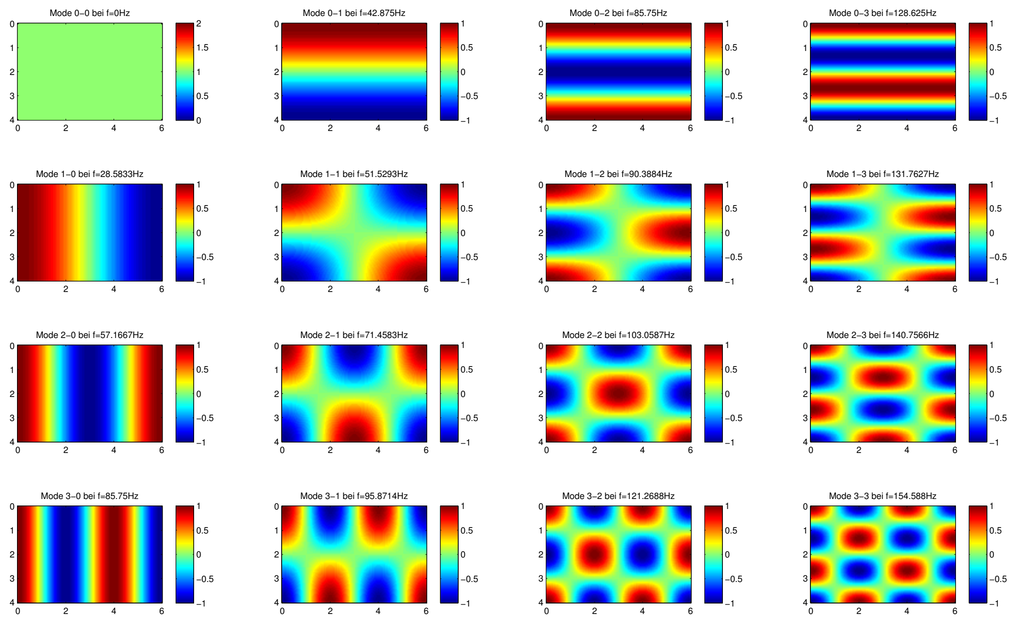
$$f = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{6m})^2 + (\frac{1}{4m})^2} = 51,5Hz$$

Der Matlab Code für die Moden und die entsprechende Frafik sind im Folgenden gegeben:

Code:

```
% ATI - 4. Uebung
% Aufgabe 2.3

%% Darstellung des Schalldruckverlaufs der axialen und
% tangentialen Moden

clc;
clear all;
close all;

%% Konstanten

Lx      = 6;    % Laenge des Raums
Ly      = 4;    % Breite des Raums
c       = 343;  % Schallgeschwindigkeit

lmax    = 3; % maximale Ordnungszahl der dargestellten Moden
mmax    = 3;

%% Gitter erzeugen

x = 0 : 0.05 : Lx;
y = 0 : 0.05 : Ly;

[X, Y] = meshgrid(x, y);

%% Schalldruckverlauf zum Zeitpunkt t=0 berechnen und plotten

index=1;    % Index des Subplots
figure('position',[30 60 1200 700])

for l = 0:lmax
    for m = 0:mmax

    p = cos(l * pi * X / Lx) .* cos(m * pi * Y / Ly);

    f = c/2 * sqrt((l/Lx)^2 + (m/Ly)^2); % Frequenz der Schwingung

    subplot(lmax+1,mmax+1,index);
```

```
    imagesc(x,y,p);
    colorbar;
    axis image;
    title(['Mode ',num2str(l), '-' ,num2str(m), ' bei f=', ...
        num2str(f), 'Hz']);

    % der Befehl num2str() gibt den Wert der Variablen als Text aus

    index=index+1;
    end
end
```



4) Betrachten Sie zwei Räume mit dem in etwa gleichen Volumen von $27m^3$.

Raum 1 hat die Abmessungen 2,93m x 3,58m x 2,57m
Raum 2 hat die Abmessungen 3m x 3m x 3m.

Plotten Sie für diese beiden Raüme mit Hilfe von MATLAB die Moden im Bereich von 0 bis 150Hz. Welche Unterschiede in den Modenspektren können Sie feststellen und wie wirken sich diese auf den Klangeindruck des Raumes aus?

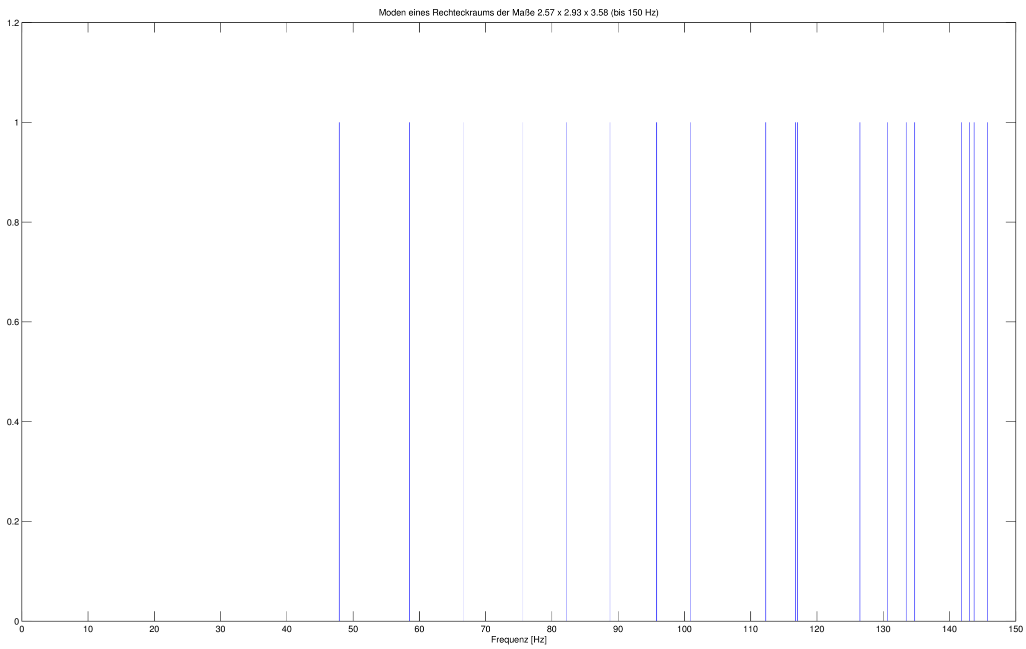
Lösung:
Der Code, der die Plots generiert, ist:

Code:

```
% ATI - 4. Uebung
% Aufgabe 2.4 - 2.5
```

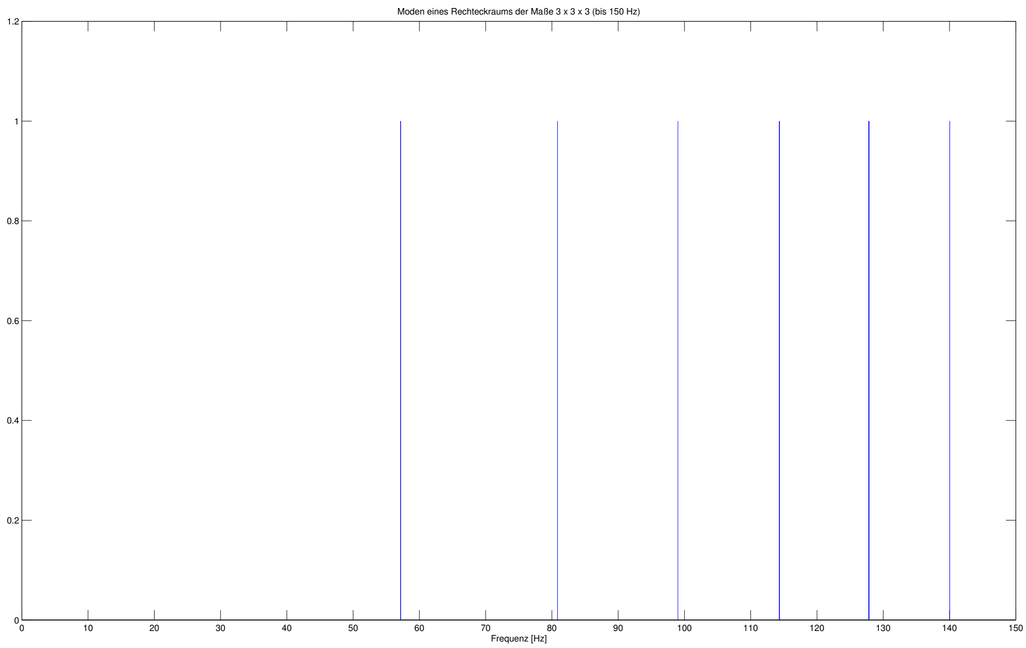
```
%% Konstanten

% 1.4
% a)
 Lx     = 2.57;
 Ly     = 2.93;
 Lz     = 3.58;

% b)
% Lx     = 3;
% Ly     = 3;
% Lz     = 3;

% 1.5
% Lx     = Lx*2;
% Ly     = Ly*2;
% Lz     = Lz*2;


 c     = 343; % Schallgeschwindigkeit
f_max = 150; % Hoechste interessierende Frequenz (in diesem Fall)

%% Berechnung der Moden

% Die Ordnungszahl, bis zu der die Moden berechnet werden muessen, um
% sicherzustellen, dass alle Moden in dem uns interessierenden
% Frequenzbereich liegen, richtet sich nach den axialen Moden zwischen
% den am weitesten auseinanderstehenden Waenden (siehe Gleichung zur
% Modenberechnung). Die Formel zur Berechnung der axialen Moden lautet:
% f = c*n / 2*d. Daraus folgt, dass n = f * 2*d / c ist.

N = floor( 2 * f_max * max([Lx Ly Lz]) / c );

%Initialisierung eines Vektors, in dem alle Moden gespeichert werden

%l, m und n laufen jeweils von 0 bis 5 also (N+1)^3 Werte

f_lmn = zeros(1, (N+1)^3);

%for-Schleife ueber alle Moden

 index = 1;

 for l = 0:N
     for m = 0:N
         for n = 0:N

             f_lmn(index) = c/2 * sqrt( (l/Lx)^2 + (m/Ly)^2 ...
                 + (n/Lz)^2 );
             index = index + 1;
```

```
        end
    end
end

% Eliminieren der Mode 0,0,0 (die gar keine Mode ist)

f_lmn = f_lmn(2:end);


%% Plot der Moden

y = ones(1, length(f_lmn));  % y-Werte fuer den Plot

figure;
stem(f_lmn, y, 'Marker', 'none');
axis([0 f_max 0 1.2]);
set(gca, 'XTick', f_max / 15 * (0:15));

title(['Moden eines Rechteckraums der Masse ' ,num2str(Lx), ...
    ' x ' ,num2str(Ly), ' x ' ,num2str(Lz), ' (bis 150 Hz)']);
xlabel('Frequenz [Hz]');
```



Es lassen sich in den beiden Plots zwei Dinge feststellen:

1) Die Modendichte, also die Anzahl der Moden in einem bestimmten Frequenzband, nimmt mit steigender Frequenz zu. Dieses lässt sich in beiden Räumen erkennen, deutlicher jedoch wird es im Plot des ersten Raums.
2) Die Modendichte ist im Falle von Raum 1 deutlich höher als in Raum zwei. Der wurfelförmige Raum hat die Eigenschaft, dass sich die Moden bei exakt den selben Frequnezn ausbilden. Die



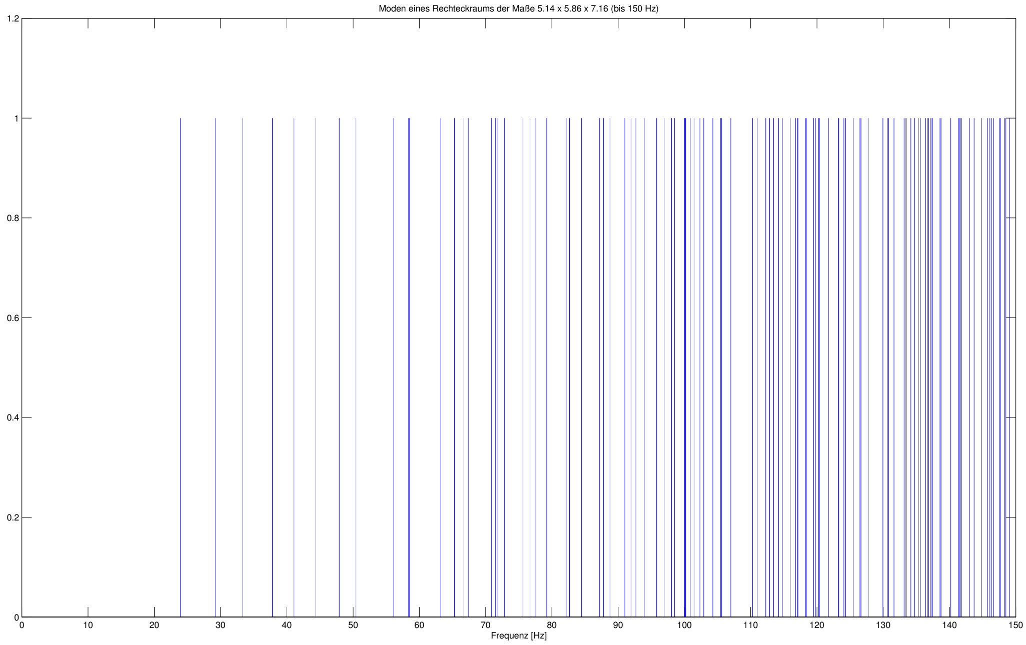
$1-0-0$ Mode hat somit die gleiche Frequenz wie die $0-1-0$ und die $0-0-1$ Mode. Gleiches gilt beispielsweise für die Moden $1-2-2$, $2-1-2$ und $2-2-1$.

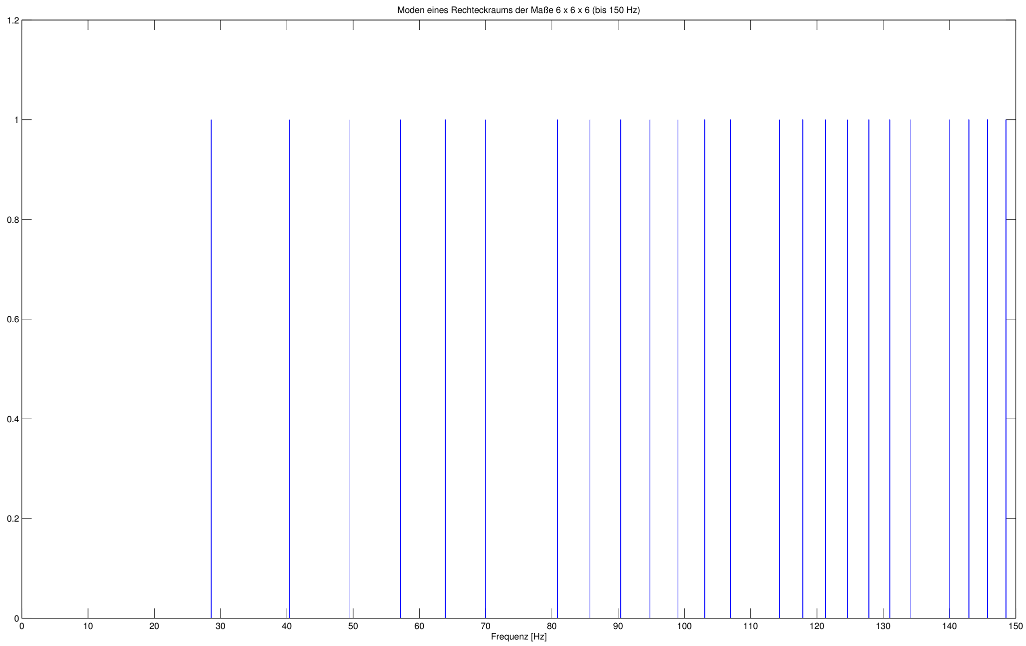
Jede Eigenfrequenz/Raumresonanz hat eine Verstörkung des Frequenzgangs des Raums an der entsprechenden Frequnezstelle zur Folge. Dies wirkt sich insbesondere in Bereichen mit geringer Eigenfrequenzdichte störend aus. Die Überhöhung ist hier deutlich zu hören, weil in den benachbarteb Frequenzbereichen keine Moden zu finden sind. Im Falle von hoher Eigenfrequenzdichte verschmelzen die Eigenfrequenzen und machen sich nicht als einzelne Überhöhungen im Frequenzgang bemerkbar.

5) Betrachten Sie nun erneut den Raum 1 aus der vorherigen Teilaufgabe, sowie einen Raum mit den jeweils doppelten Abmessungen und plotten Sie auch diese beiden. Welche Unterschiede können Sie hier feststellen?

Lösung:
Abgesehen von den Raumproportionen spielt auch die Raumgröße eine Rolle. In größeren Räumen ist generell auch in tieferen Frequenzbereichen eine hohe Eigenfrequenzdichte festzustellen als bei kleineren Räumen mit gleichen Proportionen.

Kleine quaderförmige Räume mit ganzzahligen Wandlängenverhältnissen sind daher besinders gefährdet, eine ungüntige Modenverteilung aufzuweisen. Das Problem kleiner Räume stellt sich häufig bei Regieräumen von Tonstudios.


Moden eines Rechteckraums der Maße 5.14 x 5.86 x 7.16 (bis 150 Hz)
Frequenz [Hz]


Moden eines Rechteckraums der Maße 6 x 6 x 6 (bis 150 Hz)
Frequenz [Hz]